

KINEMATIKA - opis gibanja

FIZIČKI SUSTAV - ono što "promatramo", odnosno želimo
(Physical system) (matematički) opisati/predstaviti ...

npr. neko "tijelo" (predmet), ...

→ OKOLINA - "sve ostalo", sve što nije dio "našeg"
(Environment) sustava, a što na njega djeluje/utječe
"izvana" (interakcija)

REFERENTNI SUSTAV - "perspektiva" iz koje "naš" sustav
(Frame of reference) promatramo/opisujemo ...

⇓
{ KOORDINATNI SUSTAV (ishodište i smjer x, y i z osi)
+
VRIJEME/SAT (početni trenutak) }

→ može se i gibati i mirovati u odnosu na promatrani
fizički sustav ! (kako nam je već praktičnije...)

Materijalna točka - bezdimenzionalna, "matematička" točka
koja ima fiz. svojstva (npr. masu)

→ CENTAR MASE - točka koja "predstavlja" cijeli sustav,
(Centre of Mass)
⇒ KAO da je sva MASA "u njoj"

POLOŽAJ - neke točke u prostoru (u pravilu centra mase)
(Position)

- VEKTOR u NEKOM referentnom / koordinatnom sustavu!
- FUNKCIJA VREMENA ! (jer se može mijenjati u vremenu)

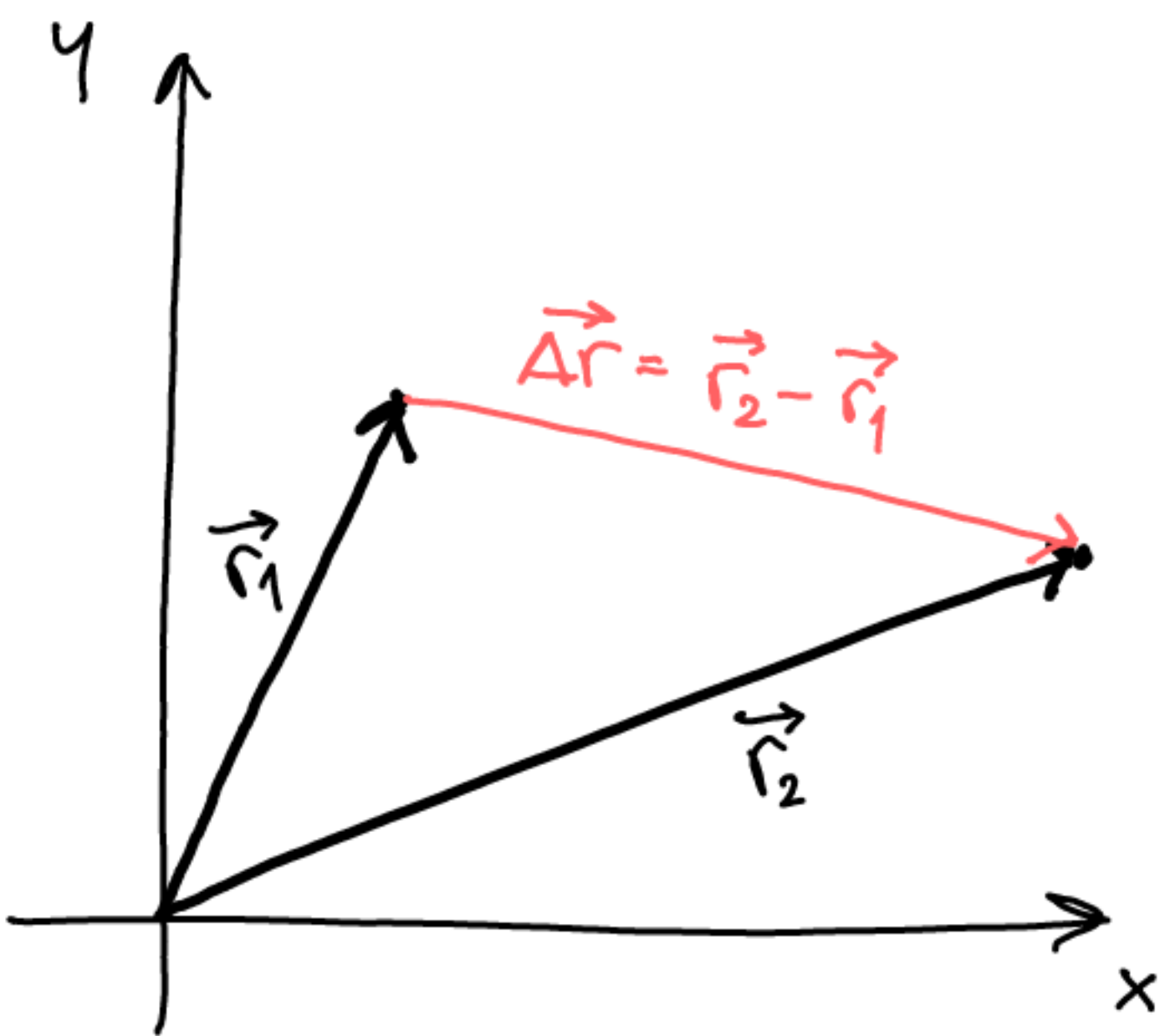
⇒ zapis: $\vec{r}(t) = (\underline{x(t)}, y(t), z(t))$
(uobičajeni)

↑ mi ćemo najčešće imati samo
gibanje u 1D ⇒ $\vec{r}(t) = (x(t), 0, 0)$

→ POMAK - razlika 2 položaja („nakon” - „prije”)
(Displacement)

↳ $\Delta \vec{r}$ = $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (u 1D: $\Delta x = x_2 - x_1$)

{ znak „ Δ ” (veliko grčko DELTA) općenito označava
„promjena” / „razlika” / interval ... npr. u vremenu itd.
($\Delta t = t_2 - t_1$) }

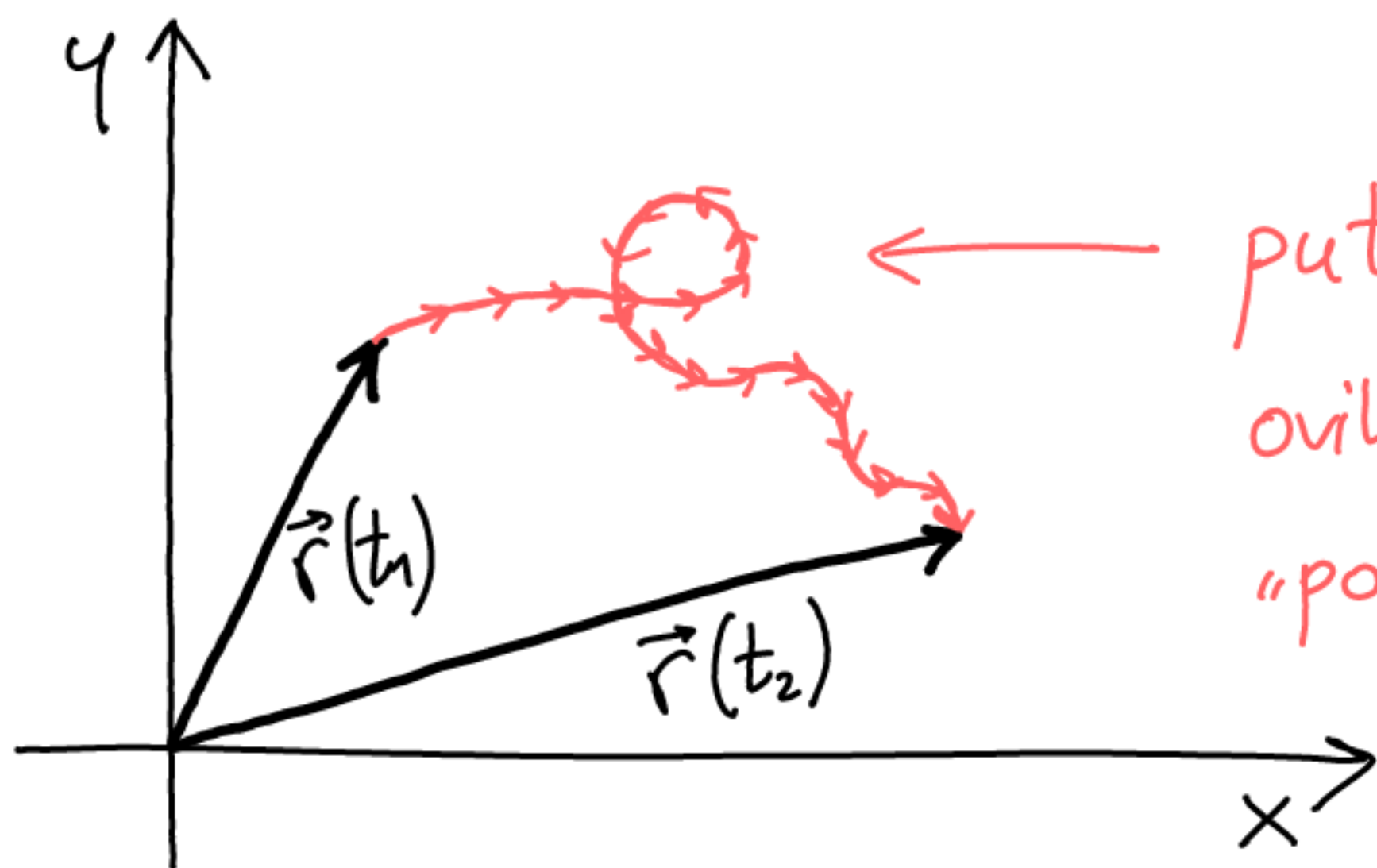


→ pomak ($\Delta \vec{r}$) NE OVISI O
REFERENTNOM SUSTAVU !
(isti vektor u svim sustavima)

→ PUT (Path) – (beskonačni) zbroj (beskonačno) malih pomaka! Samo iznosi

↳ intuitivno: dužina „krivulje“ kretanja u prostoru

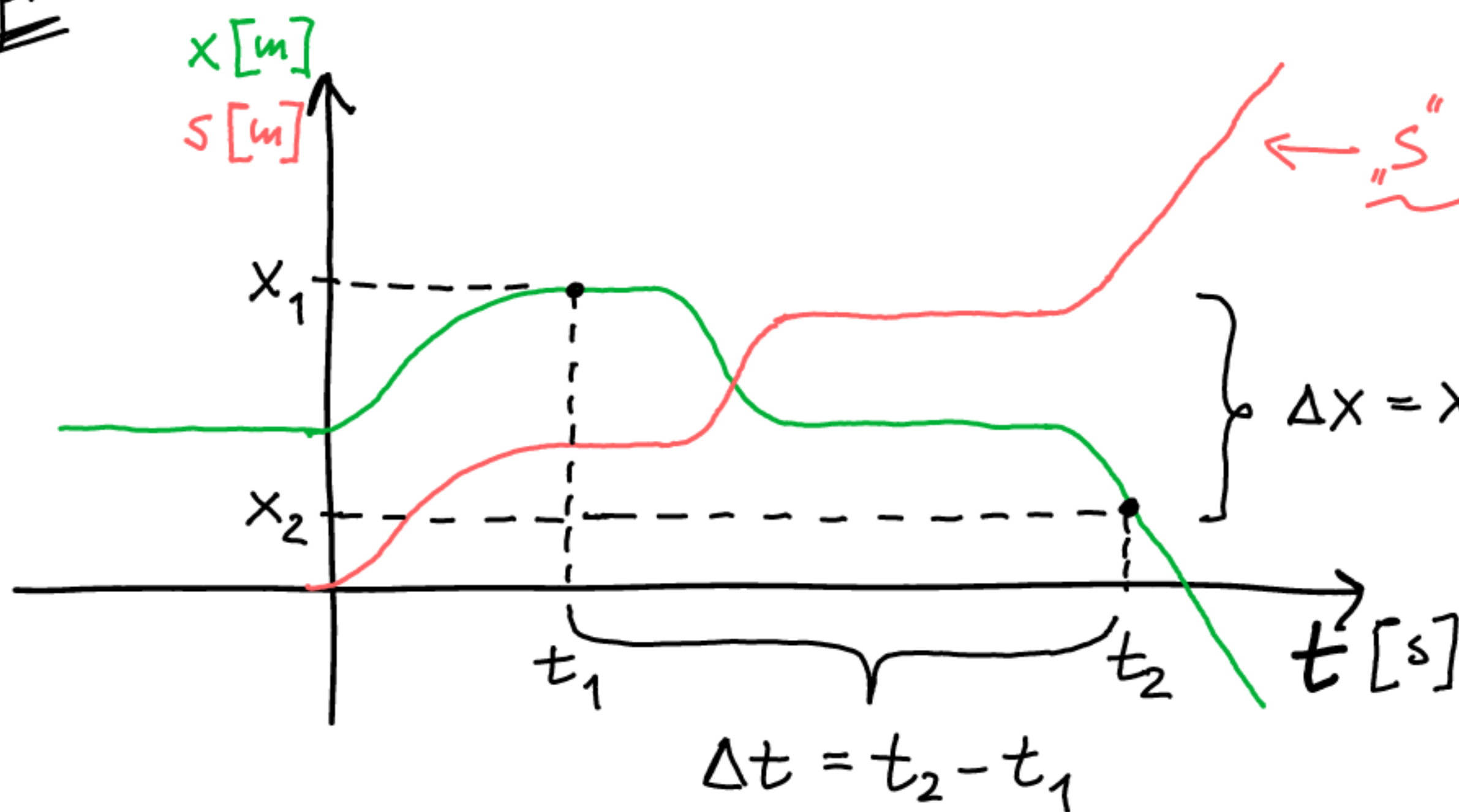
– također funkcija vremena: $s(t)$ (uobičajena oznaka)



← put „ s “ je zbroj dužina svih ovih malih „strelica“ između „početnog“ i „konačnog“ položaja

→ Graf položaja/puta u vremenu... (1D!)

npr.



← „ s “ UVIJEK > 0 (logično)

$\Delta x = x_2 - x_1$ (< 0 u ovom slučaju...)

BRZINA - naglost promjene položaja (centra mase)

(Velocity)

→ VEKTOR: iznos (speed) + smjer

(u 1D neg. iznos
znači suprotni smjer)

→ FUNKCIJA VREMENA: $\vec{v}(t)$

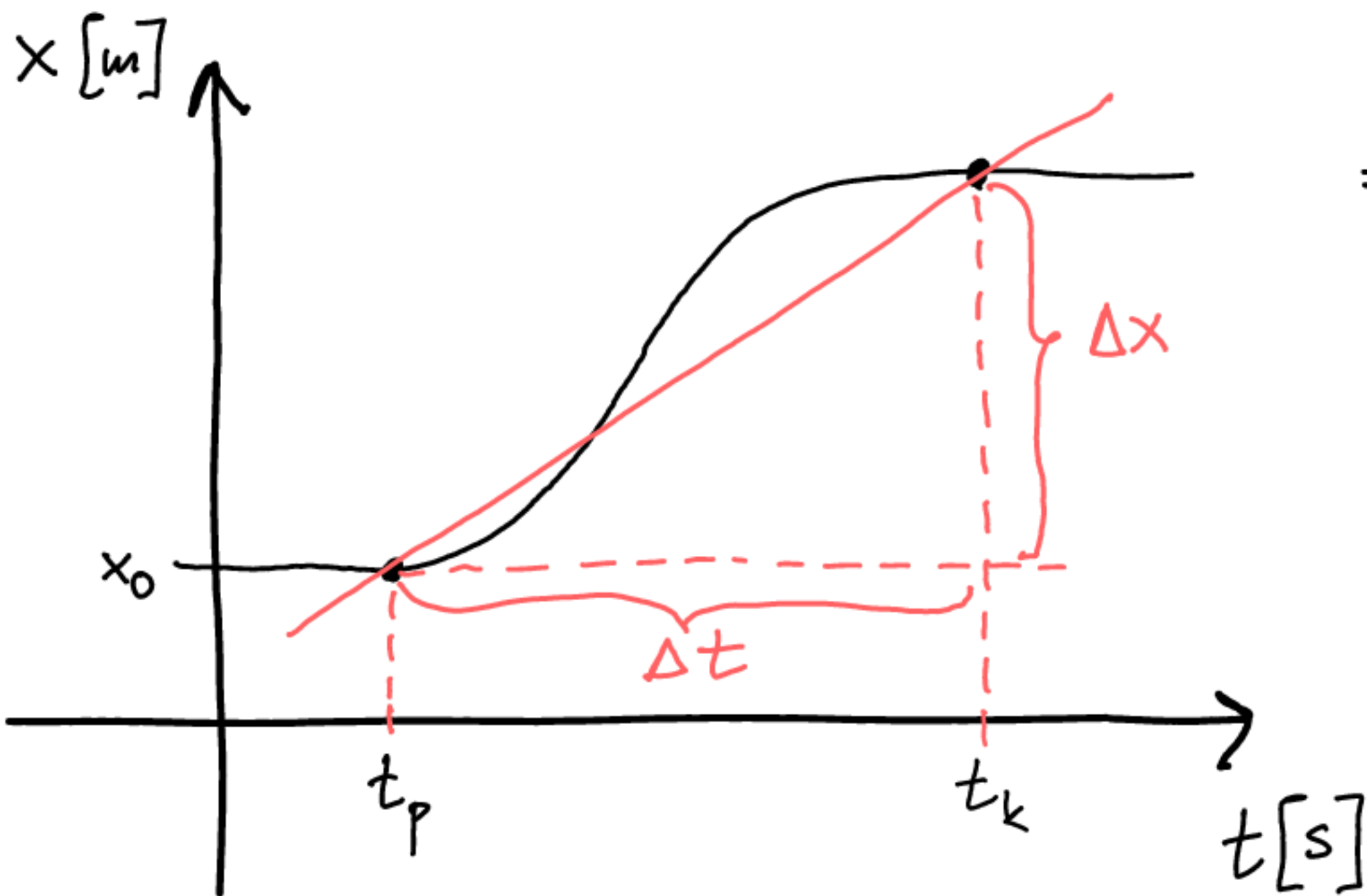
→ određena u SVAKOM trenutku (TREKUTNA brzina)

→ SREDNJA BRZINA (u nekom vremenskom intervalu)

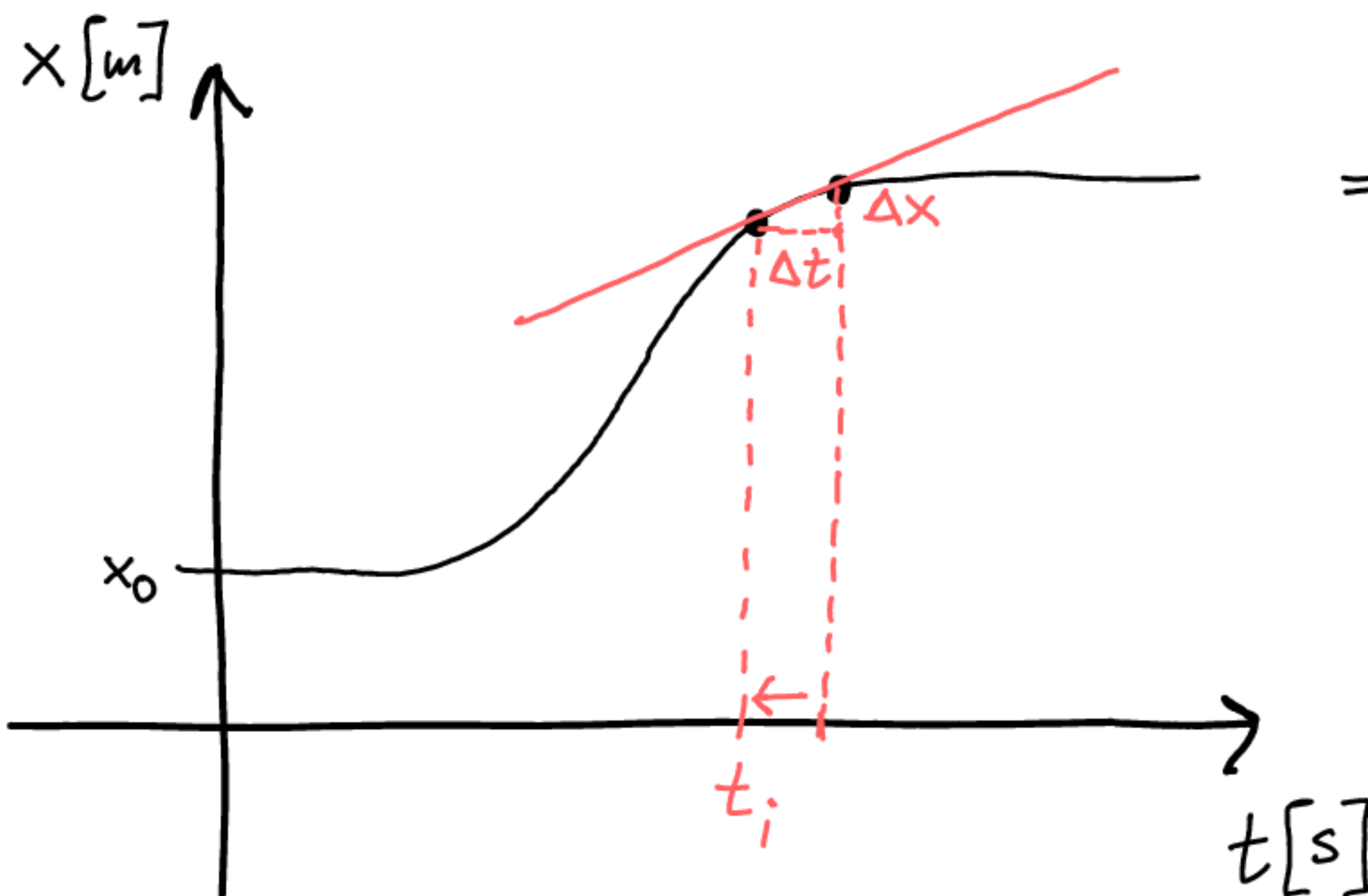
(ili PROSJEČNA brzina)

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

{ samo "broj" tj. iznos $[\frac{m}{s}]$,
NJE funkcija ! }



$\Rightarrow \bar{v}$ je nagib
pravca kroz poč.
i krajnju točku
gibanja !



(instantaneous velocity)

$\Rightarrow$ trenutna brzina $v(t_i)$

nagib je TANGENTE
na graf položaja u
tom trenutku !

TANGENTA - pravac koji "dira" krivulju (graf) u samo jednoj točki (ne sječe ju)

matematički zapis te ideje:

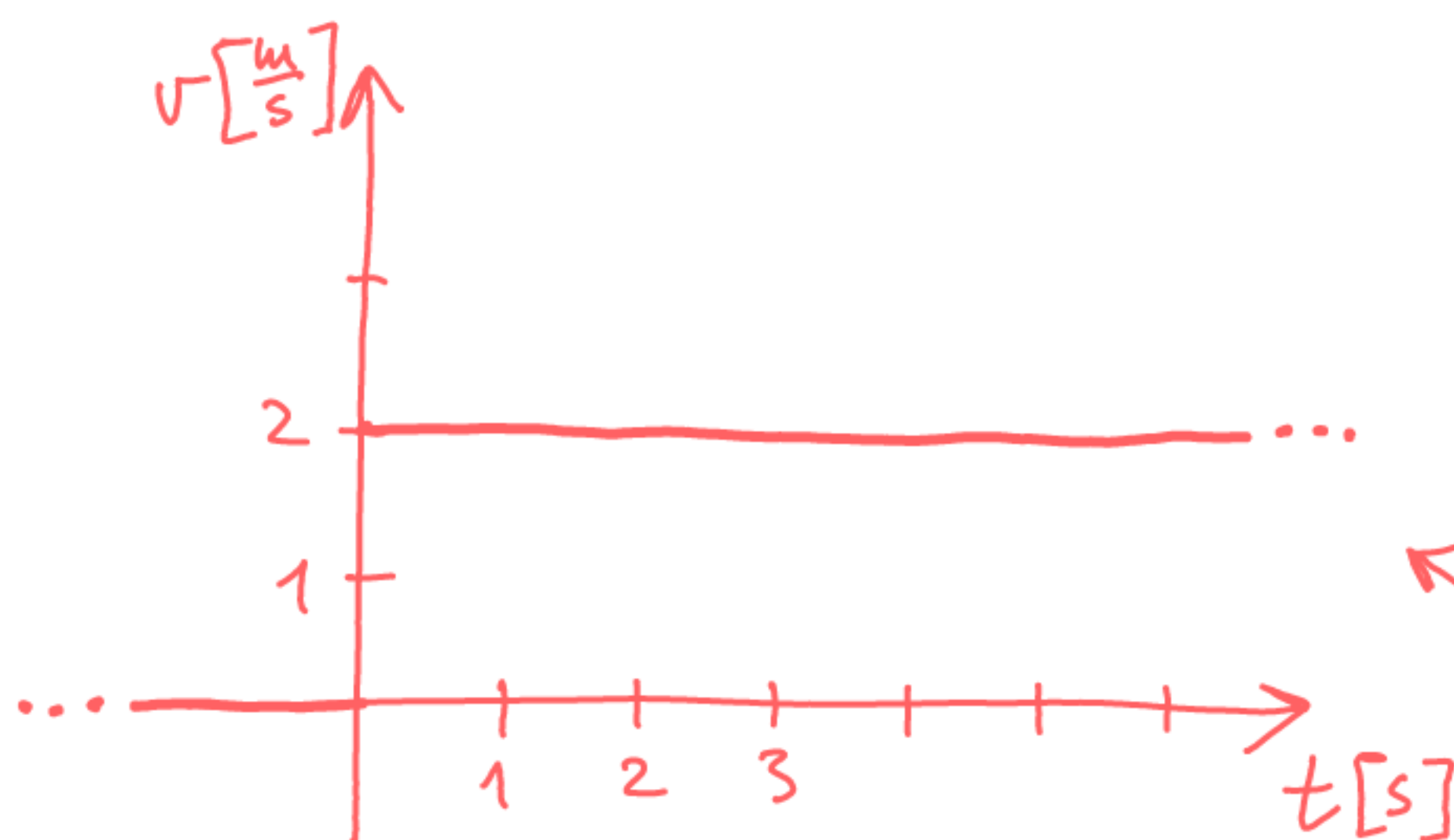
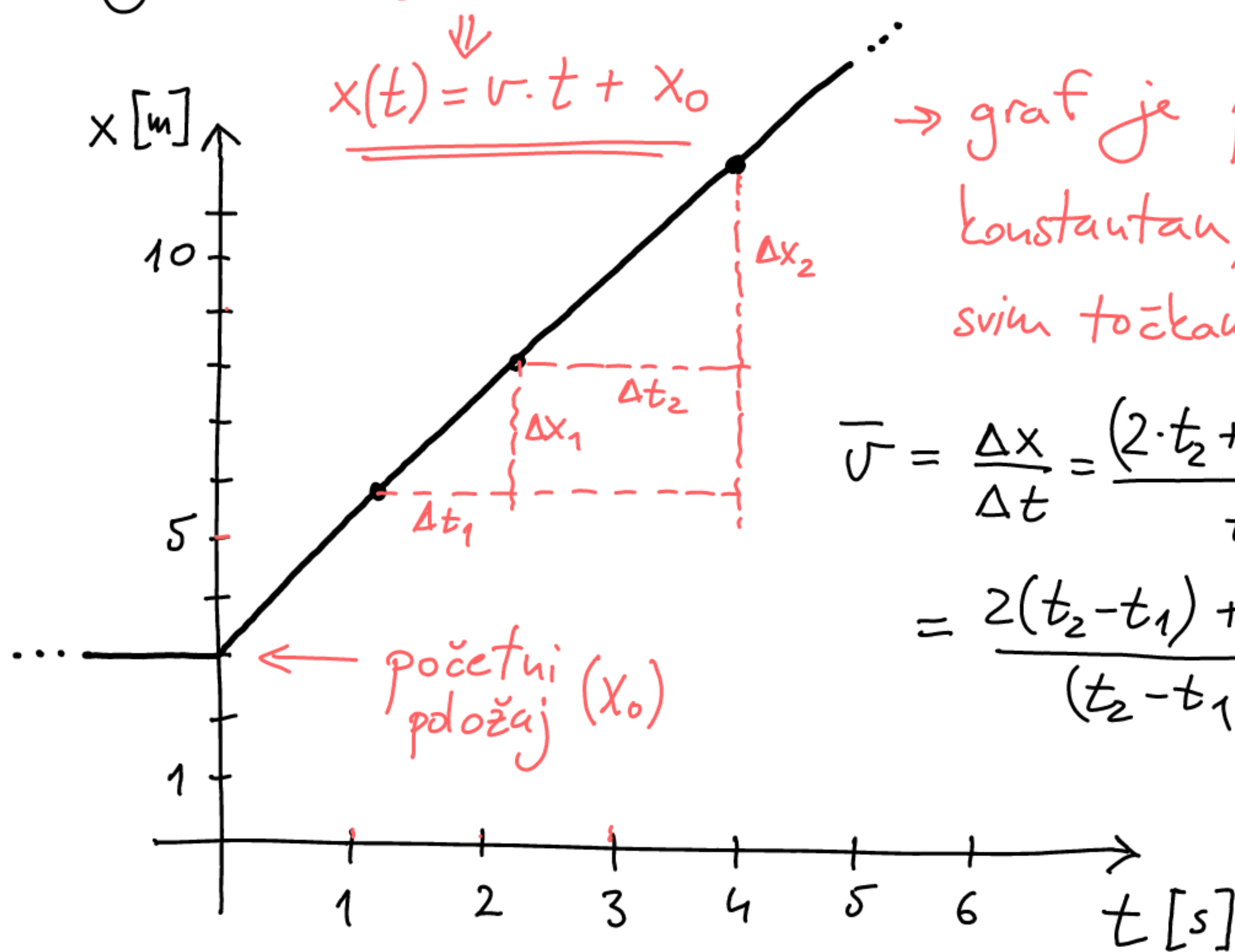
$$v(t_i) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|_{t_i} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_i} \text{ u tom trenutku}$$

općenito: $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

DERIVACIJA položaja u vremenu = nagib tangente na graf položaja u svakom mogućem trenutku

(ne morate ovo znati/zapamtiti, te znakove i pojmove, ali razmislite o tome i probajte razumjeti...)

Primer: $x(t) = 2t + 3$, za $t > 0$



$$\Rightarrow \underline{\underline{v(t) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

KONSTANTNA
BRZINA !

(i dalje funkcija,
samo konstantna)

Primer teksta zadatka: Čovjek udaljen 3 m od zida odjednom počne hodati brzinom od 7.2 km na sat. Prikaži to grafom položaja i brzine. Za ishodište uzmi poziciju zida, a kao poč. trenutak uzmi početak hodanja.

Takvo gibanje (konstantnom brzinom bez promjene smjera) zove se JEDNOLIKO PRAVOCRTNO GIBANJE !

$$\Rightarrow v(t) = V \text{ (konstanta)}$$

$$\Rightarrow x(t) = V \cdot \underline{t} + \textcircled{x_0} \rightarrow \text{početni položaj}$$

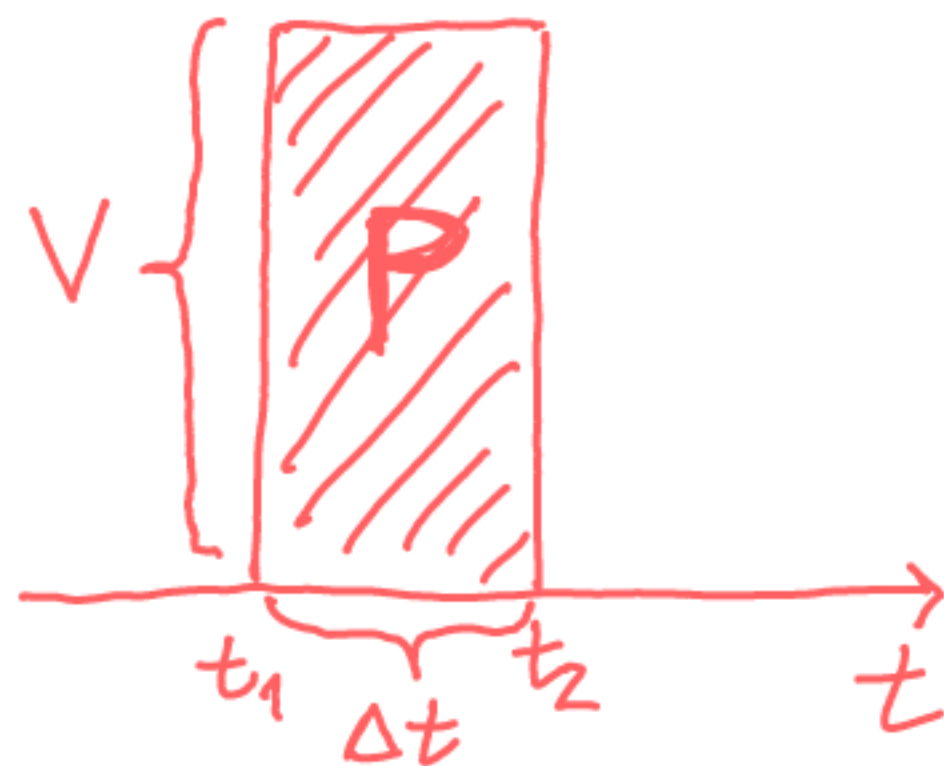
→ vrijeme proteklo OD POČETKA TOG GIBANJA,
(dakle definiramo početni trenutak tog gibanja kao $t=0 \Rightarrow x(0)=x_0$)

→ IZRAČUN POMAKA IZ BRZINE (za jednoliko pravocrtno gib.)

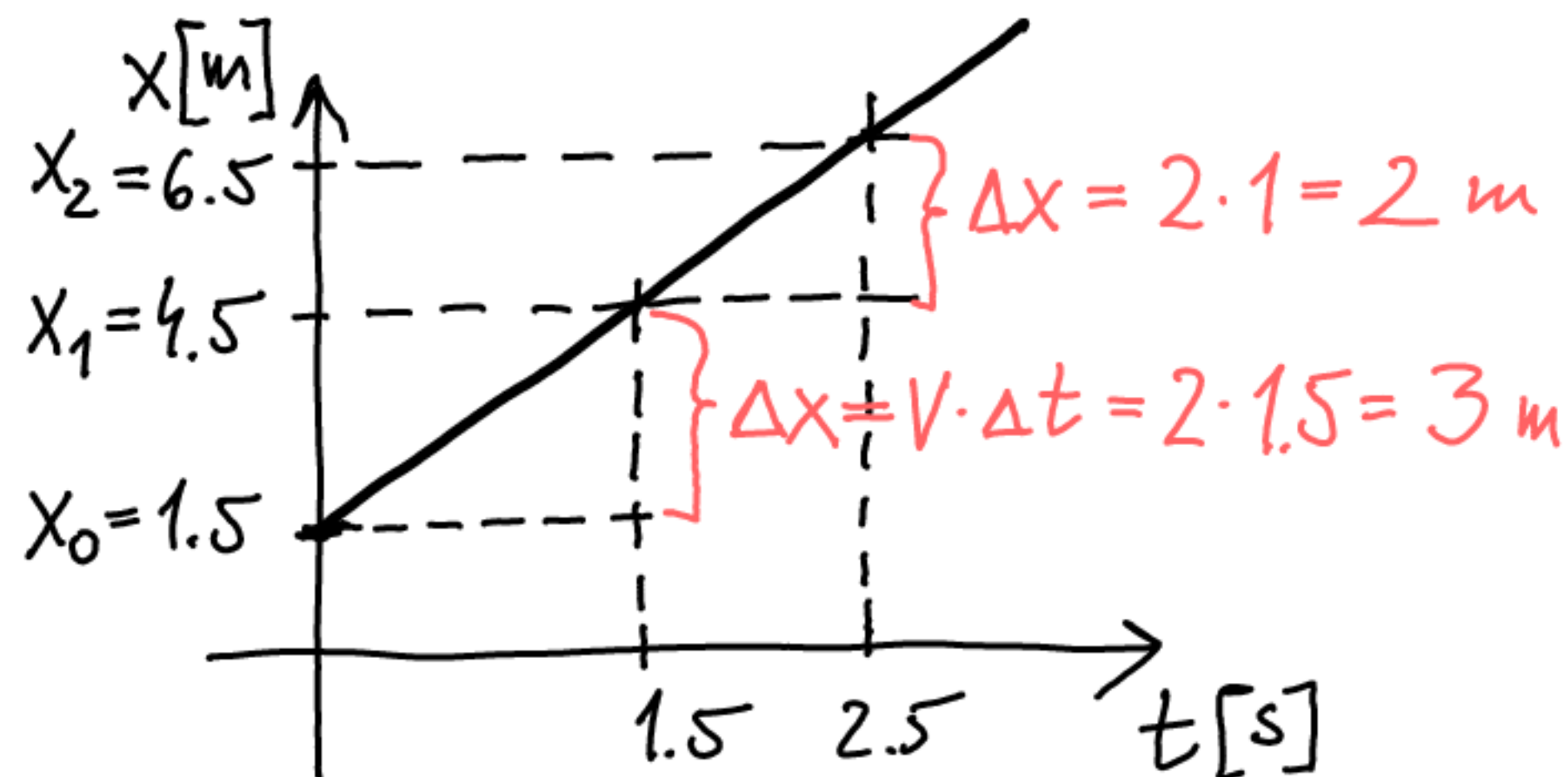
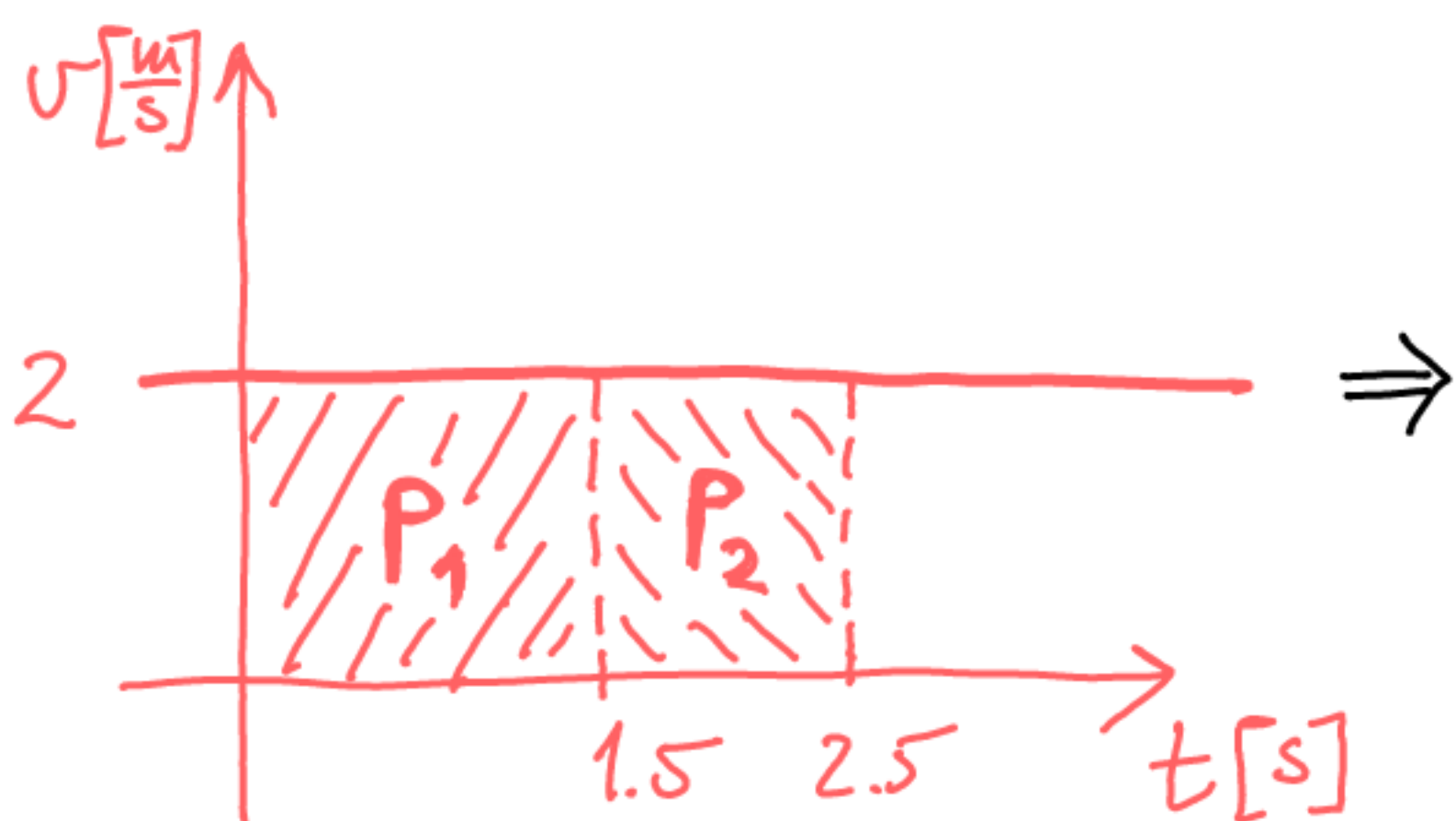
$$\Rightarrow x(t_2) - x(t_1) = (V \cdot t_2 + x_0) - (V \cdot t_1 + x_0)$$

$$\underline{\Delta x = V \cdot \Delta t} \rightarrow \text{pomak napravljen u } \Delta t \dots$$

Geometrijski: površina pravokutnika
„visine“ V i „širine“ Δt !

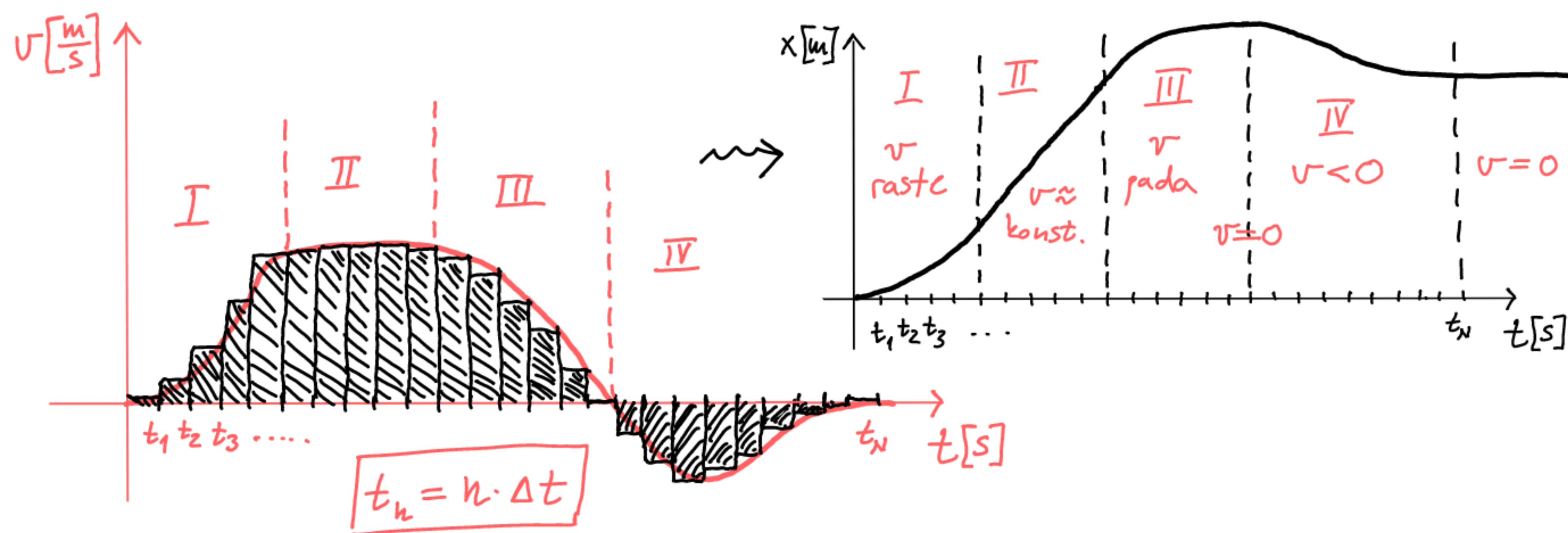


Ako nacrtamo v - t graf...



- ⇒ Pomak (put?) u nekom vremenskom intervalu Δt
- jednak je površini „ispod“ v - t grafa u tom Δt !

A što ako kretanje NIJE JEDNOLIKO ($v(t) \neq \text{konst.}$) ... ??



$P_n = v(t_n) \cdot \Delta t \rightarrow$ površina n -tog pravokutnika = pomak koji bi nastao u Δt da se tijelo gibalo (konstantnom) brzinom $v(t_n)$

$P_{uk} = \sum_{n=1}^N P_n \rightarrow$ ukupna površina = pomak koji bi nastao da se brzina mijenjala tako „stepenasto“

⇒ Što je manji $\Delta t (\rightarrow 0)$ i veći $N (\rightarrow \infty)$ to je P_{uk} (zbroj površina pravokutnika) bliži stvarnoj površini „ispod“ grafa !

Dakle, prijeđeni put/pomak UVIJEK je jednak površini ispod grafa brzine u vremenu (u nekom vrem. intervalu).

Površina ispod grafa neke funkcije računa se pomoću

INTEGRALA : $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = x(t_2) - x(t_1)$

Ispada da je INTEGRAL u nekom smislu SUPROTNA operacija/stvar DERIVACISI. $x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} dx$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \int v dt = v(t)$$

(ne morate ovo znati/zapamtiti, te znakove i pojmove, ali razmislite o tome i probajte razumjeti...)

AKCELERACIJA - naglost / brzina promjene BRZINE

(Acceleration)

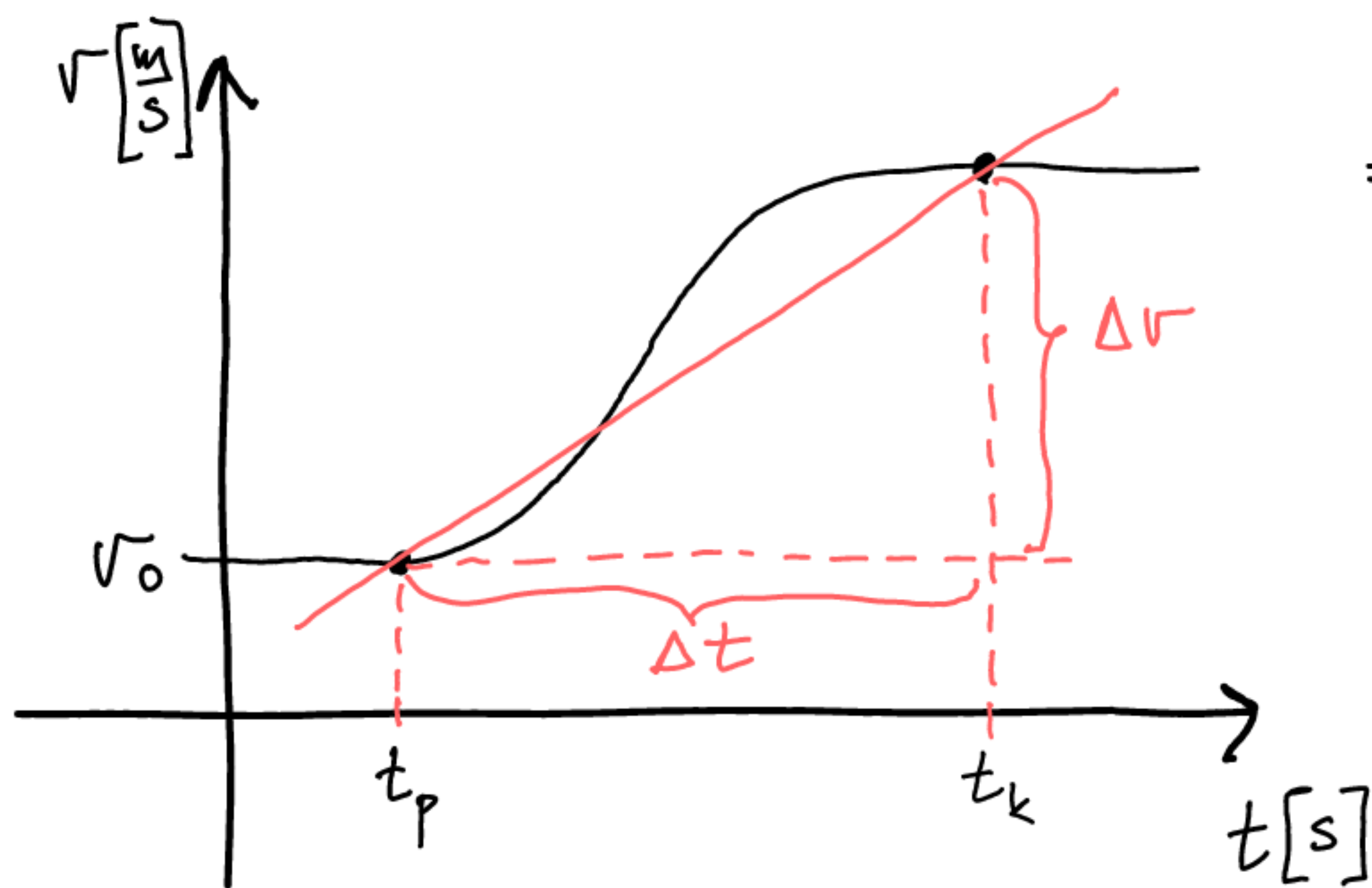
→ VEKTOR: iznos i smjer (smjer/predznak suprotan brzini znači USPORAVANJE)

→ FUNKCIJA VREMENA: $\vec{a}(t)$

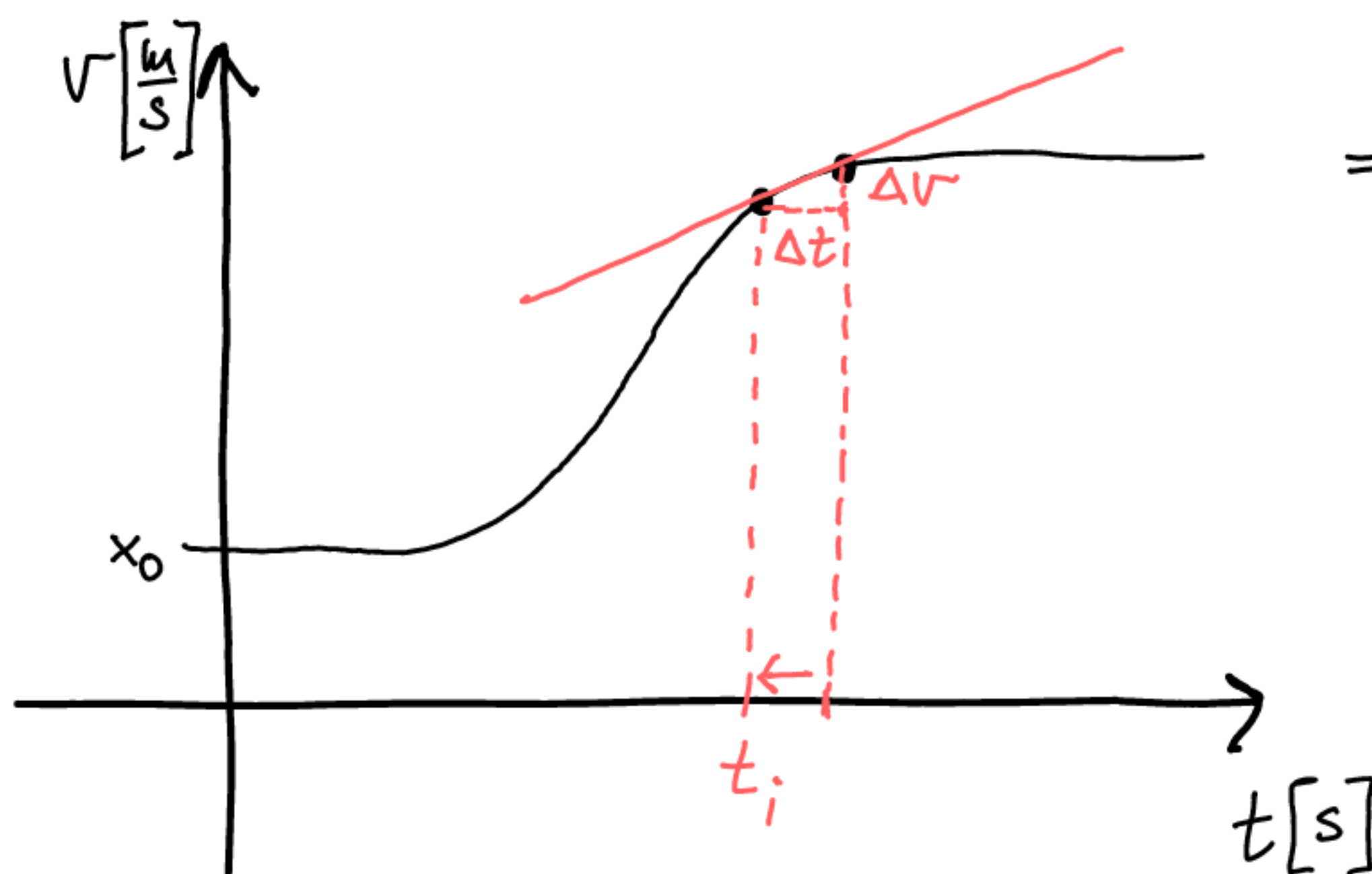
→ određena u SVAKOM trenutku (sve isto kao kod brzine...)

→ SREDNJA AKCELERACIJA (u nekom vremenskom intervalu)

$$\rightarrow \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \left\{ \text{samo "broj" tj. iznos } \left[\frac{m}{s} \right], \right. \\ \left. \underline{\text{NJE funkcija!}} \right\}$$



$\Rightarrow \bar{a}$ je nagib pravca kroz poč. i krajnju točku ubrzavanja!



$\Rightarrow$ trenutna akceleracija nagib je TANGENTE na graf brzine u tom trenutku!

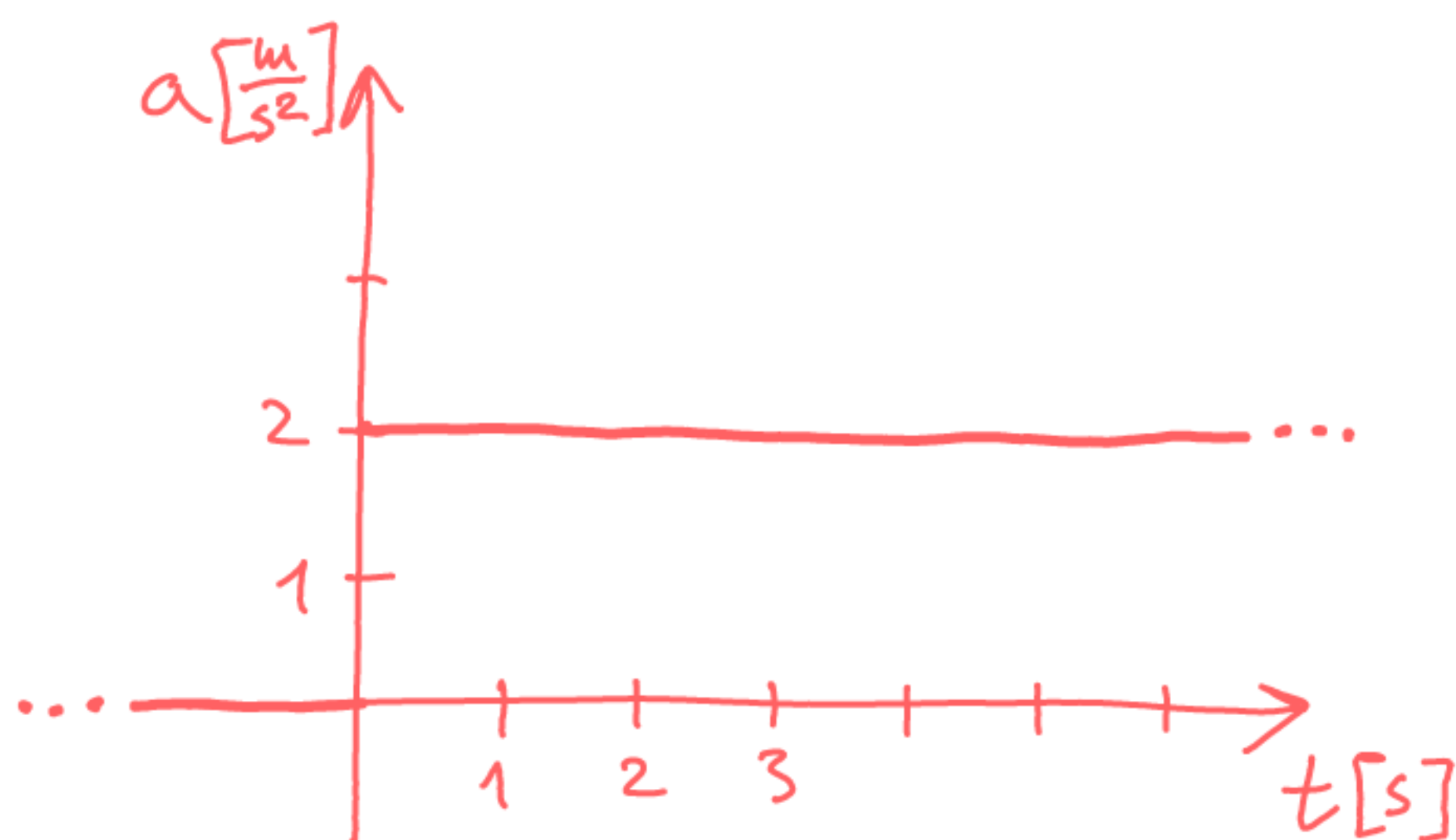
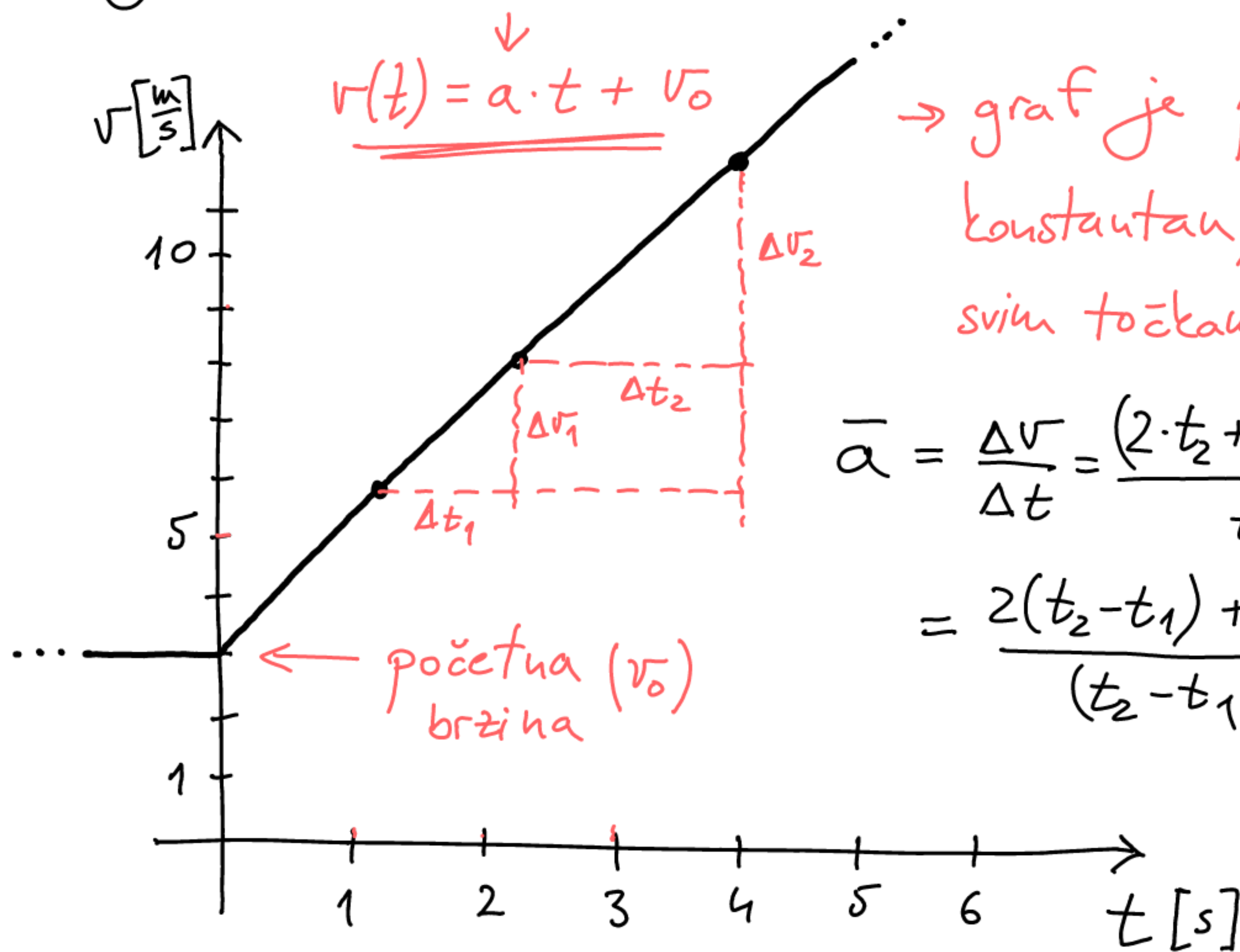
Isto kao kod brzine i položaja, akceleracija kao funkcija DERIVACIJA je brzine u vremenu ($a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$), dakle nagib tangente u svakoj točki grafa brzine...

No, budući da vrijedi: $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, onda vrijedi i:

$a = \frac{d(\frac{dx}{dt})}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \rightarrow$ akceleracija je DRUGA derivacija položaja u vremenu (promjena promjene)

(ne morate ovo znati/zapamtiti, te znakove i pojmove, ali razmislite o tome i probajte razumjeti...)

Primer: $v(t) = 2t + 3$, za $t > 0$



$$\Rightarrow \underline{\underline{a(t) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

← KONSTANTNA AKCELERACIJA!

Primer teksta zadatka: Vozač koji se u autu vozi brzinom od 10.8 km na sat u jednom trenutku stisne papučicu gasa i počne ubrzavati za 7.2 km na sat svake sekunde. Nacrtaj grafove brzine i akceleracije u vremenu.

Takvo gibanje (konstantnom akceleracijom bez promjene smjera) zove se JEDNOLIKO UBRZANO (PRAVOCRTNO).

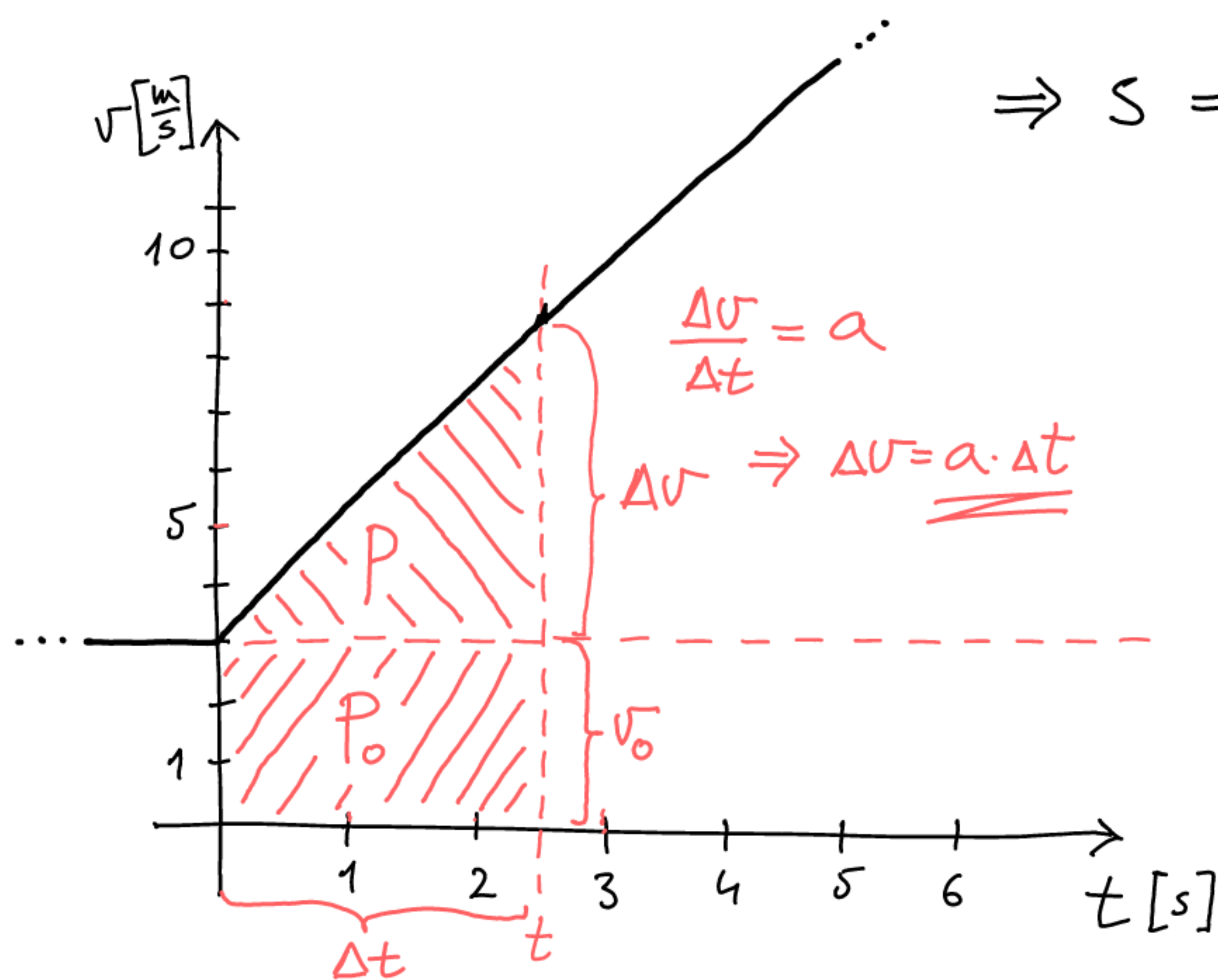
$$\Rightarrow a(t) = a \text{ (konstanta)}$$

$$\Rightarrow v(t) = a \cdot \underline{t} + \underline{v_0} \rightarrow \text{početna brzina}$$

↳ vrijeme proteklo OD POČETKA TOG GIBANJA
($t_0 = 0$; $v(0) = v_0$; $x(0) = x_0$)

Pitanje: Koliki je onda vozač/automobil put prešao tijekom tog ubrzavanja ??

Rekli smo ranije da je OPĆENITO put/pomak površina „ispod“ $v-t$ grafa, odnosno „umnožak“ brzine i vremena...



$$\begin{aligned} \Rightarrow S = \Delta x &= x(t) - x_0 = \\ &= P + P_0 = \\ &= \frac{\Delta v \cdot \Delta t}{2} + v_0 \cdot \Delta t = \\ &= \frac{(a \cdot t) \cdot t}{2} + v_0 \cdot t = \\ &= \underline{\underline{\frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t}} \end{aligned}$$

Općeniti izraz za položaj kod JEDNOLIKOG UBRZANOG
PRAVOCRTNOG GIBANJA je onda $(x_0 + \Delta x) \dots$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$



↳ ako ubrzanje počinje u $t_0 = 0$ s položaja $x_0 = x(0)$ i od (početne) brzine $v_0 = v(0)$

Na primjer: U slučaju automobila iz prethodnog primjera, koji je počeo ubrzavati u $t_0 = 0$ akceleracijom $a = 7.2 \frac{\text{km/h}}{\text{s}}$ od brzine $v_0 = 10.8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ s nekog položaja x_0 na kojem se tada nalazio...

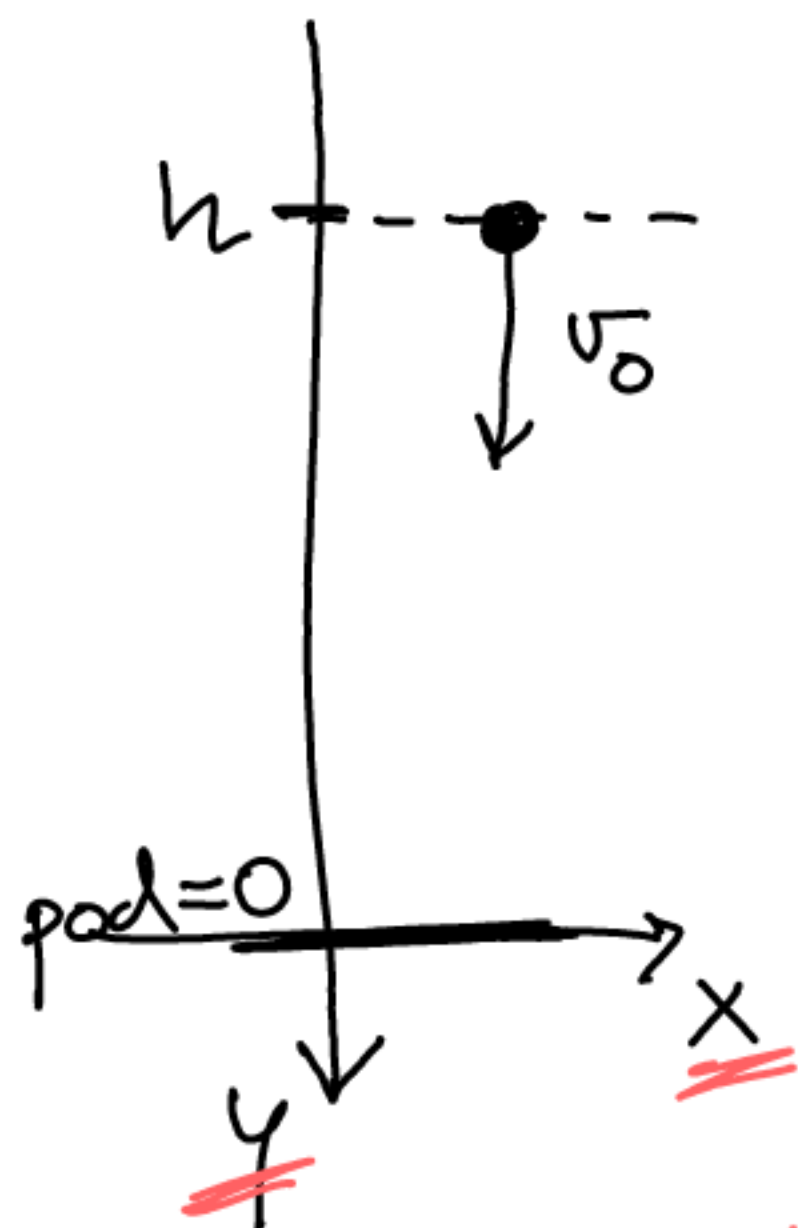
$$x(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

$$\Rightarrow \underline{s} = \Delta x = 3.6 \frac{\text{km/h}}{\text{s}} \cdot t^2 + 10.8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$$

→ nakon upr. $t = 3 \text{ s}$ ubrzavanja auto je prešao:

$$\Delta x = 3.6 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}} \cdot (3 \text{ s})^2 + 10.8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3 \text{ s} = 1.9 \text{ m} + 3.3 \text{ m} = \underline{\underline{18 \text{ m}}}$$

Primjer: Koliku brzinu postigne loptica pod utjecajem stalnog ubrzanja gravitacije ($g = 10 \frac{m}{s^2}$) neposredno pred udarac o pod, ako ju se baci s visine $h = 5 m$ početnom brzinom $v_0 = 3 \frac{m}{s}$ prema dolje?



I) $s = \Delta y = \frac{a}{2} t^2 + v_0 \cdot t$ (općenito)

$\Rightarrow h = \frac{g}{2} t^2 + v_0 \cdot t$ kako rješiti?!

II) $v(t) = a \cdot t + v_0 \Rightarrow v(t) = g \cdot t + v_0$

$t = \frac{v(t) - v_0}{g}$

III) $h = \frac{g}{2} \frac{(v(t) - v_0)^2}{g^2} + v_0 \frac{(v(t) - v_0)}{g} \quad / \cdot 2g$

$\Rightarrow 2gh = (v(t) - v_0)^2 + 2v_0 v(t) - 2v_0^2 =$

$= v^2(t) - 2v_0 v(t) + v_0^2 + 2v_0 v(t) - 2v_0^2 =$

$= v^2(t) - v_0^2 \rightarrow v(t) = \sqrt{2gh + v_0^2} = 10.44 \frac{m}{s}$

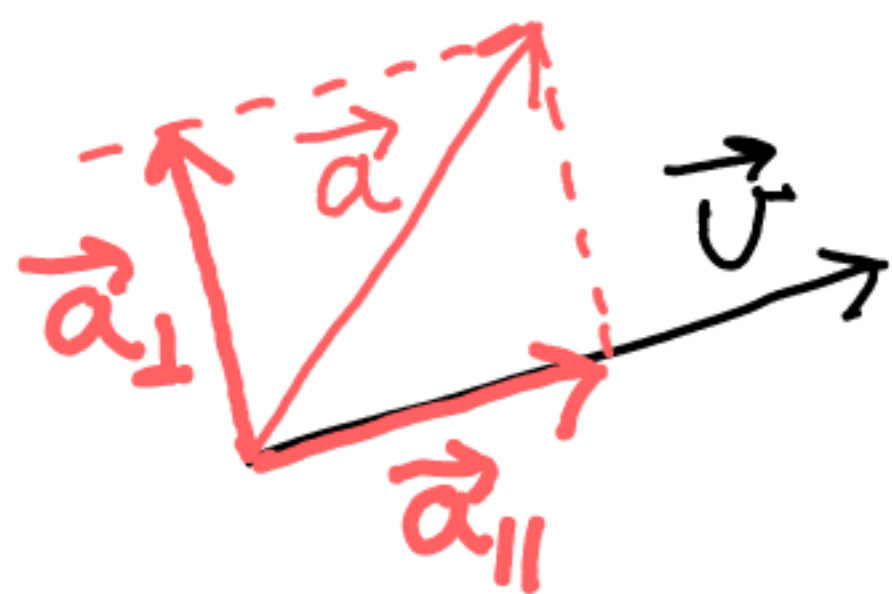
OPĆENITO:

$v^2(t) = v_0^2 + 2a \Delta x(t)$

$\Delta x = s$ SAMO ako se NE MIENJA smjer gibanja!

Što ako akceleracija NIJE na istom pravcu kao i
brzina ?? $\Rightarrow$ NEPRAVOCRTNO GIBANJE !
(promjena smjera brzine)

Općenito možemo RASTAVITI akceleraciju na komponente
u SMJERU vektora brzine ($a_{||}$) i OKOMITO na smjer vektora
brzine ($a_{\perp}$)...



$\Rightarrow$ Komponenta $a_{||} \rightarrow$ mijenja SAMO iznos brzine
(ovo što smo do sada imali)

$\Rightarrow$ Komponenta $a_{\perp} \rightarrow$ mijenja SAMO SMJER brzine !

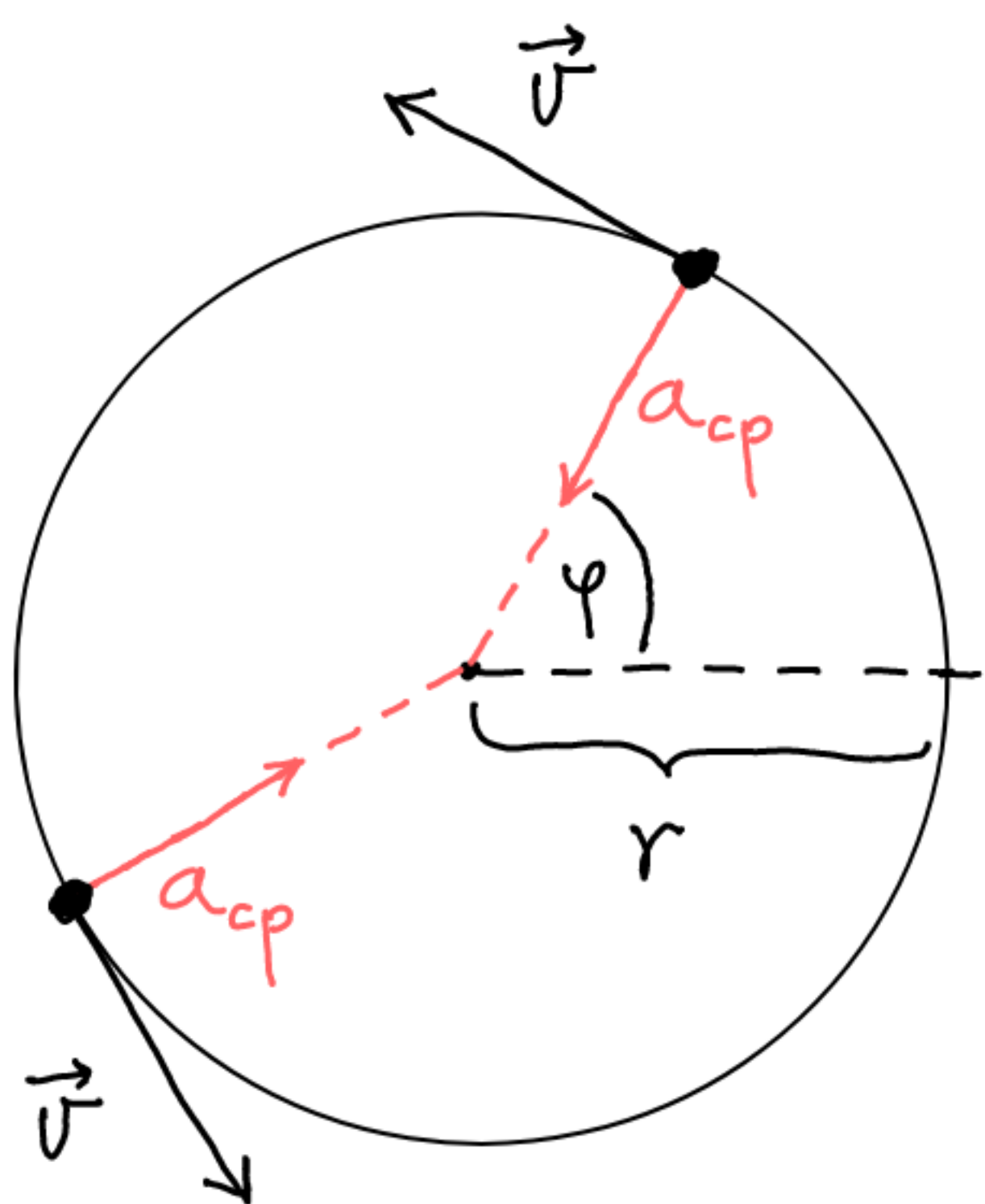
Što ako bi postojala SAMO OKOMITA komponenta ?

$\rightarrow$ Stalna promjena smjera bez promjene iznosa brzine...

$\Rightarrow$ JEDNOLIKO KRUŽNO GIBANJE !

$a_{\perp} = \underline{a_{cp}} = \underline{\text{CENTRIPETALNA akceleracija}}$

OPIS (JEDNOLIKOG) KRUŽNOG GIBANJA



$$|\vec{a}_{cp}| = \text{konst.}$$

$$|\vec{v}| = \text{konst.} \text{ (tangencijalna brzina)}$$

$$\boxed{\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0} \quad !$$

↑ promjena kuta u vremenu

$$\Rightarrow \underline{\omega} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \text{konst.} \quad !$$

↳ KUTNA BRZINA $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$

RADIJANI (rad) - mjerna jedinica za kut !

$$\underline{1 \text{ puni kut} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}}$$

Koristi se u matematici i fizici iz praktičnih razloga (jer je opseg jedinične kružnice $= 2\pi$). Ništa veće pametno...

→ JEDNOLIKO KRUŽNO gibanje je JEDNOLIKO UBRZANO (NE PRAVOCRTNO) gibanje, ALI matematički je ekvivalentno JEDNOLIKOM PRAVOCRTNOM gibanju ($v = \text{konst.}$) samo se jednoliko mijenja kut (φ), a ne položaj (x).
(kut φ označava „položaj“ na kružnici.)

PERIOD (T) - vrijeme potrebno da se dogodi jedno ponavljanje, jedan PUNI KRUG.

→ FREKVENCISA (f) - broj ponavljanja u jedinici vremena

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T}} \left[\frac{1}{s} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ HERTZ} = \text{jednom u sekundi} \right]$$

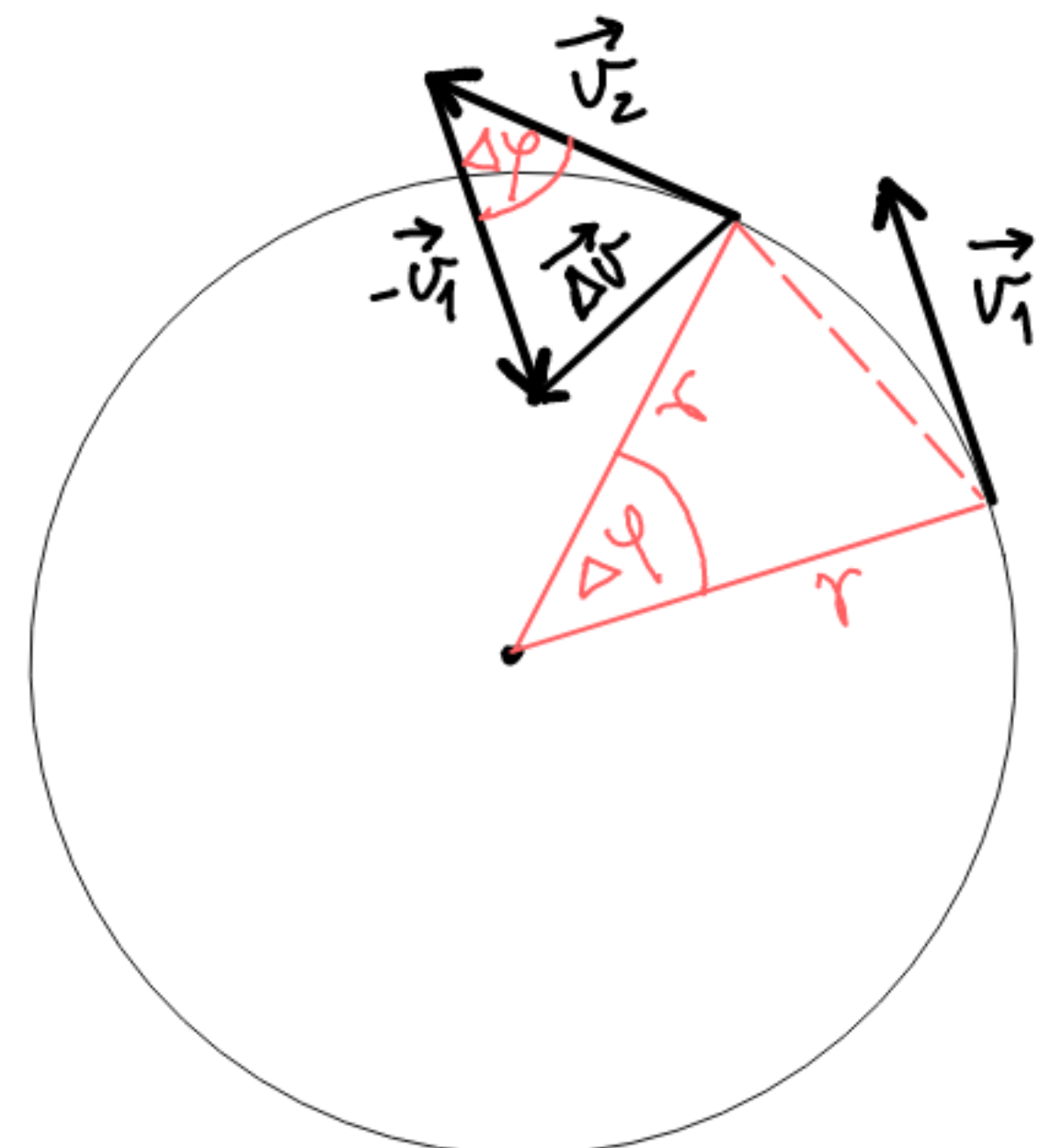
$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{\text{rad}}{s} \right] \rightarrow \text{jedan puni krug/kut u jednom periodu} \\ = \underline{\underline{2\pi f}}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \text{ (cijeli opseg kruga u jednom periodu)} = \underline{\underline{\omega \cdot r}} !$$

$$\Rightarrow a_{cp} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = v \cdot \omega =$$

za MALI Δt ($\Delta t \rightarrow 0$)

$$\Rightarrow \boxed{a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r} !$$



$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi \approx \Delta x$$

$$\Rightarrow (\text{sličnost}) |\Delta \vec{v}| \approx |v| \cdot \Delta\varphi$$