

DINAMIKA - uzroci i zakoni gibanja

SILA - centralni pojam dinamike

(FORCE)

- uzrok svog gibanja (utjecaj biločega na bilošto)

- matematički/formalni OPIS MEĐUDJELOVANJA (interakcije)

→ vanjske sile - djelovanje OKOLINE na fizikalni sustav



- suprotni "smjer" djelovanja, promatranog sustava na okolinu, se zanemaruje, jer nas okolina "ne zanima"

→ unutarnje sile - djelovanje DIJELOVA fiz. sustava jednih na druge (unutar sustava)

- često nam nisu važne ...

primjeri: čovjek i zemlja - ide li zemlja nazad kad čovjek hoda naprijed?

povlačenje stola - zašto se pomiče cijeli ako povlačim samo jedan kraj?

→ fundamentalne sile - njih samo 4: gravitacijska
elektromagnetska
jaka nuklearna
slaba nuklearna

↳ KONZERVATIVNE SU
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{ovisnost o TRENUTNOM POLOŽAJU} \\ \leadsto \vec{F}(x, y, z) \end{array} \right\}$

↳ POLJA SILA $\Rightarrow$ POTENCIJALNE ENERGIJE
(o tome više kasnije)

→ fenomenološke sile - one koje opisuju pojave
(phenomen = pojava)

- npr. trenje i otpor zraka/fluida;
elastična sila $\leadsto$ reakcija podloge,
napetost niti, kontaktna sila, ...

↳ rezultati PUNO fundamentalnih međudjelovanja (sila)
među PUNO malih dijelova sustava (atoma/molekula...)

- Matematički SILA je VEKTOR (ima iznos i smjer !)

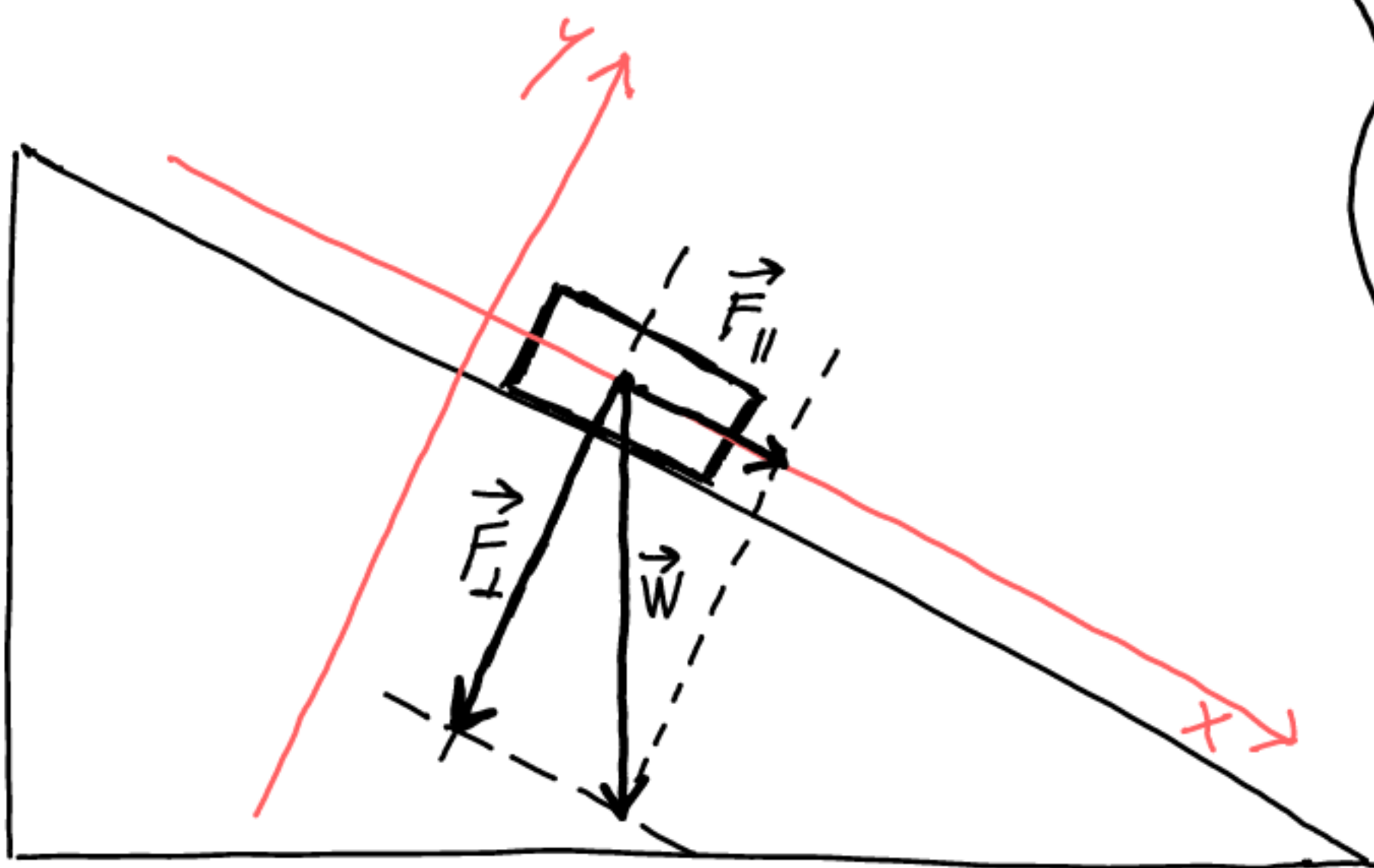
- ↳ možemo rastavljati na komponente ($\hat{x}, \hat{y} \dots$ u smjerovima osi)
- ↳ možemo zbrajati (onako kako se vektori zbrajaju)
- ↳ translatirati ?

↳ za „matematičke“ potrebe (npr. zbrajanje da se odredi ukupna sila) da, ali općenito NE, jer fizički NIJE svejedno GDJE sila djeluje !

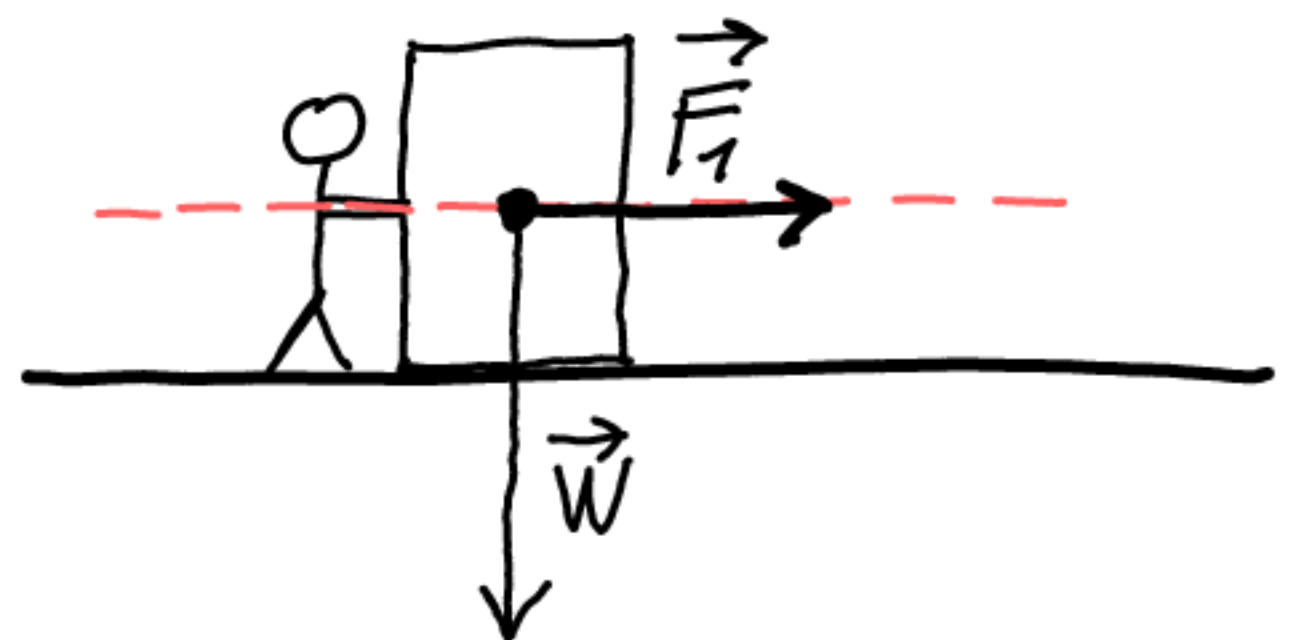
↓
HVATIŠTE SILE

→ dozvoljeno je silu „pomicati“ i crtati bilo gdje duž SMJERA djelovanja KROZ hvatište !

Na primjer :



$$\vec{W} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} = F_{\parallel} \cdot \hat{x} + F_{\perp} \cdot \hat{y}$$



sila $\vec{F}_1$ kojom čovjek djeluje ne treba se nužno crtati u hvatište, nego može bilo gdje duž crtkanog pravca ...

1. Newtonov zakon gibanja (zakon inercije ; 1/3)

Ako je ukupna sila na neko tijelo (tj. fizički sustav) jednaka nuli, brzina tog tijela ostaje ista (i iznos i smjer).

↳ Ukupna sila = vektorski zbroj svih sila!

↳ Brzina ostaje ista $\Rightarrow$ ako mirovalo ostaje mirovati ($\vec{v}=0$)
 $\Rightarrow$ ako nije mirovalo nastavlja JEDNOLIKO PRAVOCRTNO!

Tromost/inercija - činjenica da se tijelo opire promjeni brzine
(dakle da ga se mora PRISILITI da promjeni brzinu)

Prvi je to, čini se, shvatio Galileo GALILEI, ali zašto je ljudima toliko trebalo da to shvate... ?!?

$\Rightarrow$ identifikacija sila koje djeluju i "misaoni eksperimenti" koji idealiziraju svijet (a da se to ne može postići eksp.)

$\Rightarrow$ glavni problem/vještina u rješavanju zadataka/problema!

Primjer na kojem je Galileo to zaključio: knjiga str. 47.

↳ + o Galileu ... njegov stvarni doprinos + kontradikcija u tekstiću u knjizi (sa strane)

Poučavanje: Referentni sustav = "perspektiva" iz koje se
fiz. sustav/svijet "promatra"

→ INERCIJSKI REFERENTNI SUSTAV

→ onaj koji miruje ili se giba JEDNOLIKO PRAVOCRTO !

GALILEJEV PRINCIP RELATIVNOSTI

↳ u SVIM inercijskim referentnim sustavima vrijede
SVI (isti, univerzalni) zakoni fizike !

Primjeri (kako je Galileo do toga došao)

↳ brod na mirnom moru ...
↳ vlak koji se kreće JEDNOLIKO PRAVOCRTO ...

[nemoguće razlikovati
od mirovanja !]

→ sve zakone fizike koje ćemo učiti ćemo "provjeriti" na
ovaj način, po Galilejevom principu ...

npr. 1. Newtonov zakon ga zadovoljava (razmisliti kako/zašto !)

2. Newtonov zakon gibanja (THE zakon ; 2/3)

Promjena brzine tijela (fiz. sustava) u vremenu proporcionalna je ukupnoj sili na to tijelo, a obrnuto proporcionalna masi tog tijela.

→ promjena brzine u vremenu = AKCELERACIJA !
($\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ tj. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$)

→ proporcionalna uk. sili = što više sile veća akc.
(utjecaj okoline)

→ obrnuto proporcionalna masi = što veća masa to manja akceleracija

⇒ MASA = mjera tromosti / inercije tijela !
(svojstvo tijela, nevisno o okolini/okolini)

$$\Rightarrow \vec{a} \propto \frac{\vec{F}_{uk}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{uk} \propto m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{uk} = k \cdot m \cdot \vec{a}$$

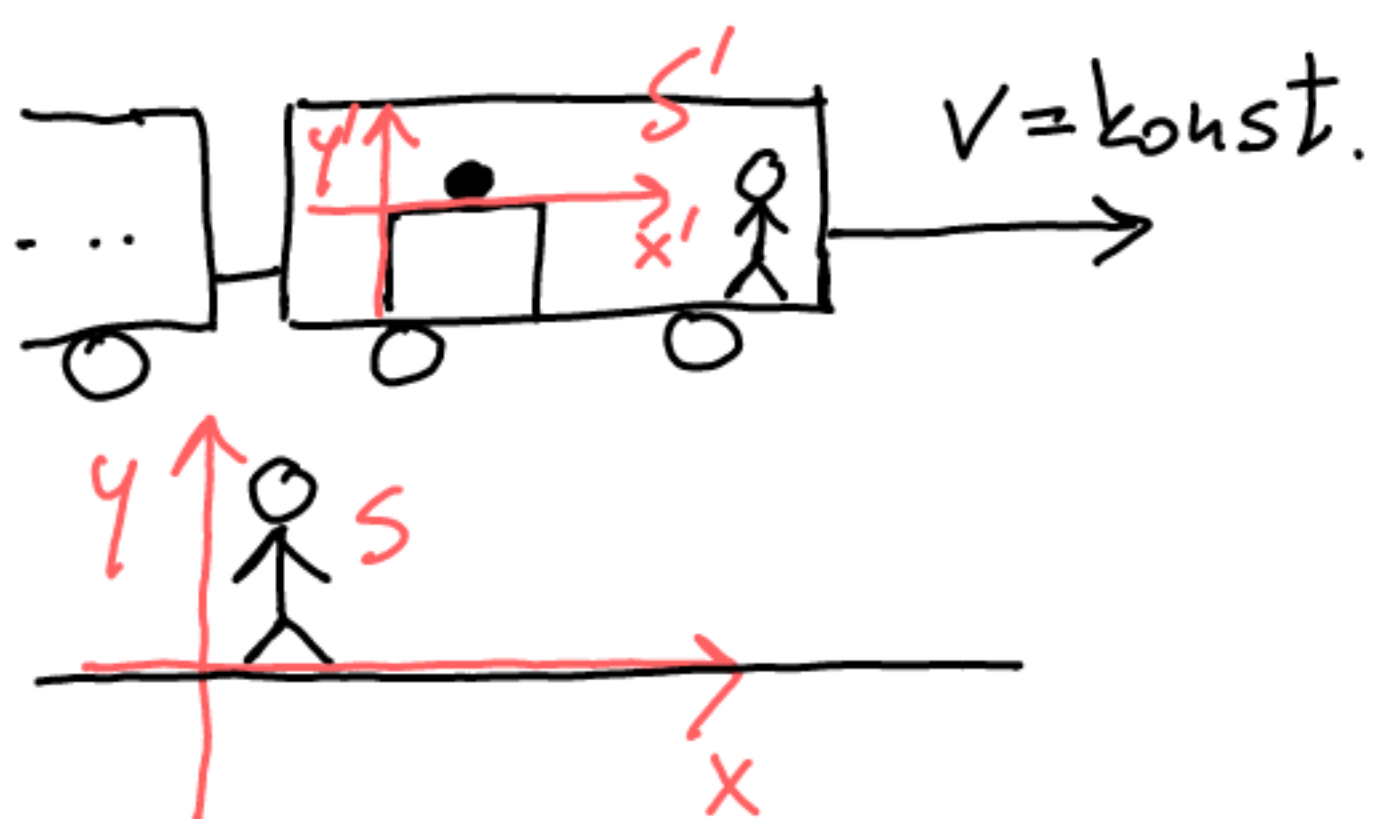
$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [?] & & [kg] & & [\frac{m}{s^2}] \end{matrix}$$

slobodan odabir, određuje
mjernu jedinicu...

$$\Rightarrow \vec{F}_{uk} = m \cdot \vec{a} \text{ [N]} \\ [1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}]$$

- provjera Galilejevog principa relativnosti:

Primer 1: mirovanje u vagonu vlaka



$$\vec{F}_{uk} = 0 \text{ (na lopticu)}$$

[neovisno
o
sustavu •]

u S': $y'(t) = y'_0 = \text{konst. (upr. 0)}$

$$x'(t) = x'_0 = \text{konst. (upr. 1m)}$$

$$\Rightarrow \vec{v}'(t) = 0 \Rightarrow \vec{a}'(t) = 0$$

u S: $y(t) = y_0 = \text{konst. (upr. 1m)}$

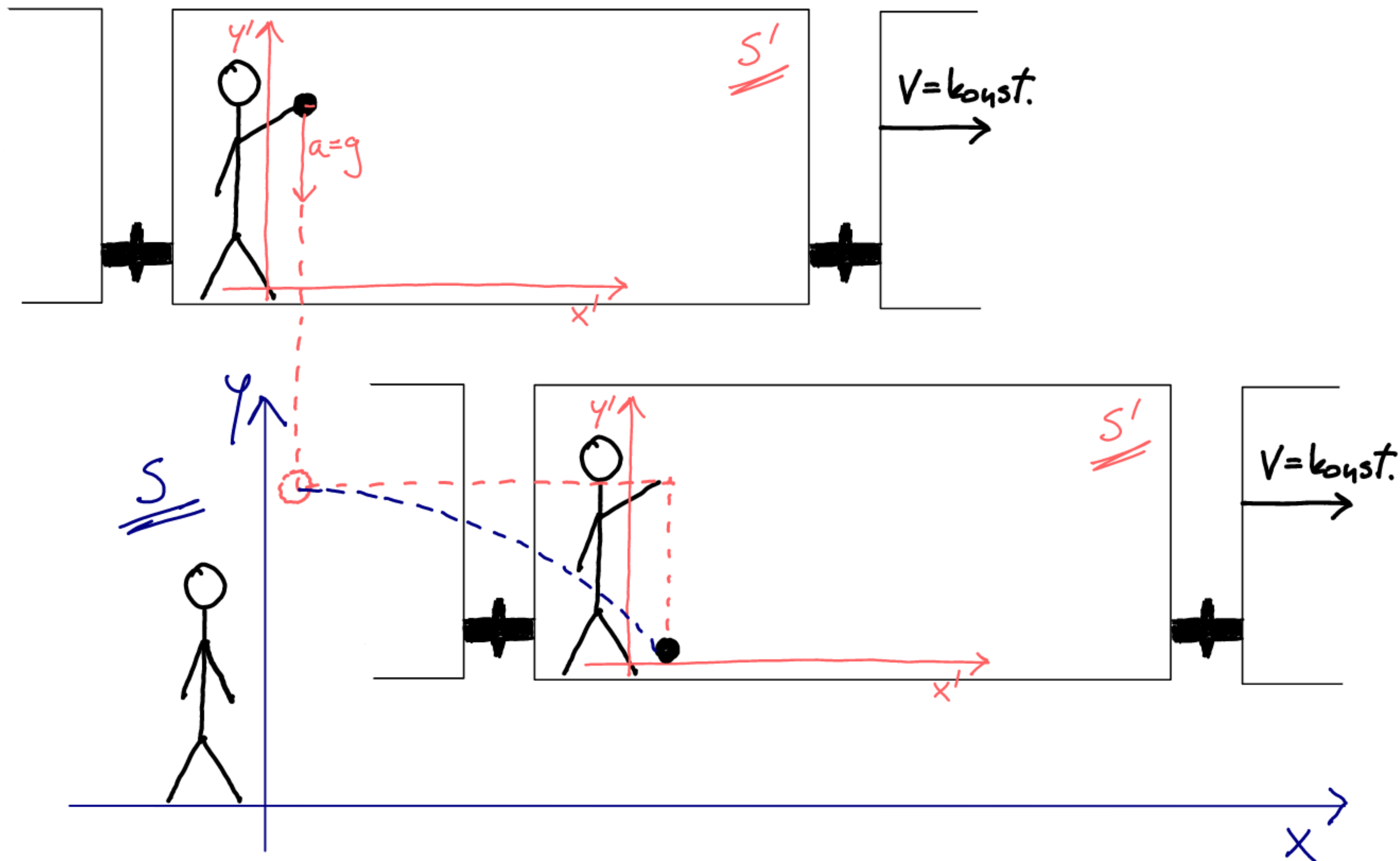
$$x(t) = x_0 + V \cdot t$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = V \cdot \hat{x} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = 0$$

$\Rightarrow$ po II. N. z. : $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{uk}}{m} = 0$ u bilo kojem inercijskom referentnom sustavu

Primer 2: slobodni pad u vagonu vlaka



$$\underline{\underline{\vec{F}_{uk} = m \cdot \vec{g}}} \Rightarrow \underline{\underline{\text{II. N.z.}}} : \vec{a} = \frac{\vec{F}_{uk}}{m} = \frac{\cancel{m} \cdot \vec{g}}{\cancel{m}} = \vec{g} \quad \text{!} \quad \left(\text{u svim inerc. ref. sustavima!} \right)$$

u S':

$$x'(t) = x_0' = \text{konst. (npr. 0.3 m)}$$

$$y'(t) = h_0' - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$\Rightarrow v_x'(t) = 0 \quad \Rightarrow a_x'(t) = 0$$

$$\Rightarrow v_y'(t) = -g \cdot t \quad \Rightarrow a_y'(t) = -g$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -g \hat{y}' = \vec{g} \quad \checkmark$$

u S:

$$x(t) = x_0 + V \cdot t$$

$$y(t) = h_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$\Rightarrow v_x(t) = V \quad \Rightarrow a_x(t) = 0$$

$$v_y(t) = -g \cdot t \quad \Rightarrow a_y(t) = -g$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -g \hat{y} = \vec{g} \quad \checkmark$$

NE inercijski referentni sustavi $\Rightarrow$ VIRTUALNE SILE

→ sile koje zapravo ne postoje nego ih "promatrač" koji miruje u neinercijskom sustavu "osjeća", odnosno mora "izmisliti" kako bi mu 2. Newtonov zakon vrijedio, iako za te sile ne vidi zapravo uzroka...

Na primjer: "nevidljiva" sila prema naprijed/nazad kada neko prijevozno sredstvo usporava/ubrzava; isto tako u npr. dizalu prema gore/dolje;



CENTRIFUGALNA sila pri kružnom gibanju

↳ "izvana" se vidi centripetalna sila koja djeluje prema sredini kruženja, inače bi tijelo produžilo ravno, ALI "iznutra" se promatraču "čini" da ga nevidljiva sila gura prema VAN ... npr. na vrtuljku

→ ako se opazi/izmjeri virtualna sila (dakle neka koja nema vidljivi uzrok) to je dokaz da se nalazite u neinercijskom sustavu (dakle da ubrzavate, usporavate i/ili skrećete)

3. Newtonov zakon gibanja (zakon akcije i reakcije)

Svaka sila (akcija, djelovanje) nečega na nešto uzrokuje jednaku (po iznosu) i suprotnu (po smjeru) PROTUSILU (reakciju) toga drugoga na to prvo.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}} \quad !$$

(vidi primjere na str. 78./79. u knjizi)

Važno je razlikovati UNUTARNE i VANJSKE sile !

↳ ako su unutarne (između dijelova istog fiz. sustava), onda MORAMO uzeti OBE u obzir ...

→ zbroj (ukupna) sila će biti 0 ! (balans sila)

npr. sudar 2 tijela (fiz. sustav su oba tijela istovremeno)

→ ako su vanjske (utjecaj okoline na fiz. sustav), onda se „reakcija“ sustava na okolinu može zanemariti ...

→ ukupna sila na fiz. sustav MOŽE biti $\neq 0$!

npr. hodanje ... Zemlja „pokreće“ čovjeka prema naprijed (preko trenja), ali i čovjek gura Zemlju istom silom prema nazad ...

Neke (fenomenološke) sile ...

1) SILA TEŽA - sila kojom Zemlja (ili neko drugo „veliko“ „nebesko“ tijelo) privlači tijela prema svojoj površini (tj. središtu)

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$$

Ako $\vec{F}_{uk} = \vec{F}_g \Rightarrow$

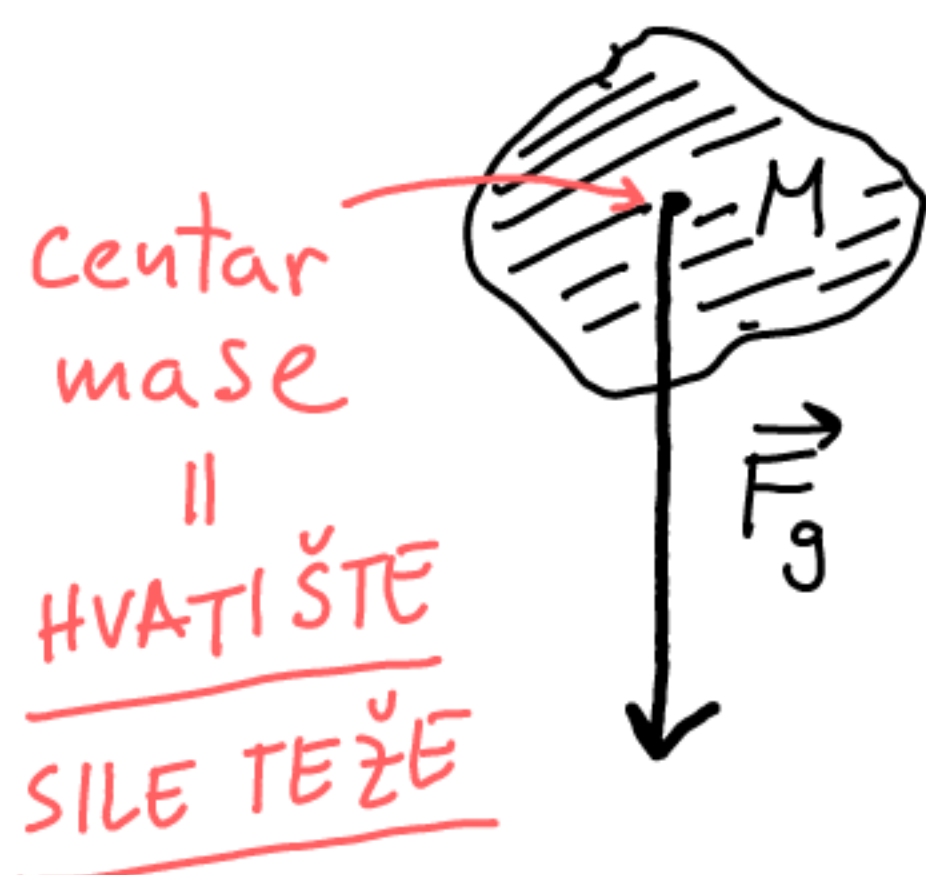
$\Rightarrow \cancel{m} \cdot \vec{a} = \cancel{m} \cdot \vec{g}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$ $\rightarrow$

- proizlazi iz gravitacijske sile (o tome više na kraju razreda)

- akceleracija sile teže ($\vec{g}$) JEDNAKA JE ZA SVA TIJELA (neovisno o njihovom obliku, masi, ...)

$\rightarrow$ UVIJEK djeluje prema središtu Zemlje, ali iznos ovisi o visini ... !



$|\vec{g}| = g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ na svim „razumnim“ visinama ...
(do ≈ 10 km n.v.)

TEŽINA - sila kojom tijelo pritišće podlogu, tj. sila koju bi „mjerila vaga“ ...

(APPARENT WEIGHT)

(više utjecaja od samo sile teže, npr. uzgon, nagib, ...)

2) ELASTIČNA SILA - sila koja dolazi od rastezanja/

$$F_{el} = -k \cdot \Delta l$$

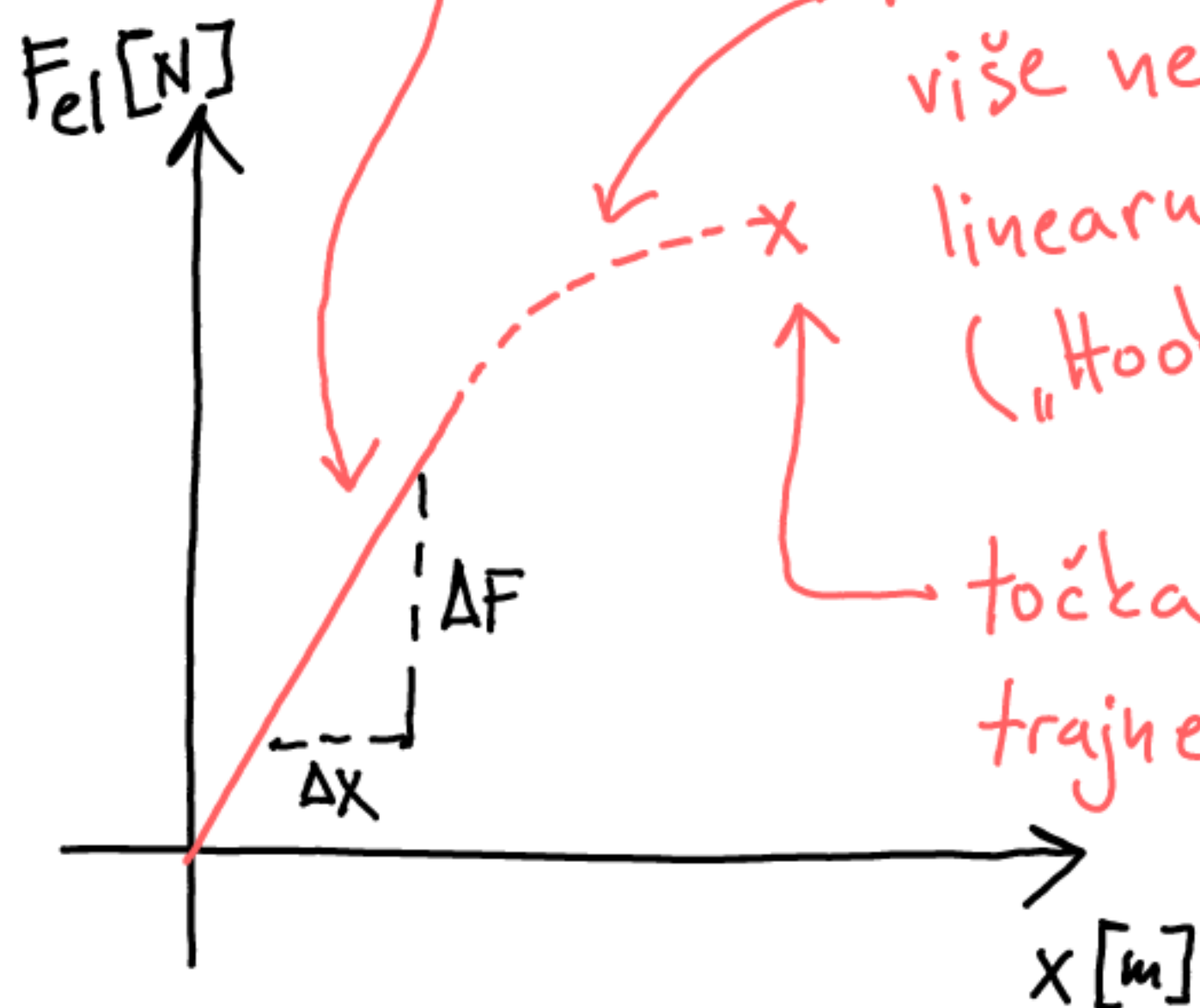
smjer!

kao funkcija, samo iznos:

$$F_{el}(x) = k \cdot (x - x_0)$$

x_0 je „ravnotežni položaj“, tj. položaj kraja elastične stvari (npr. opruge) kada je neopterećena... Uvijek se može ref. sustav postaviti tako da bude $x_0 = 0$, pa onda vrijedi:

$$F_{el} = k \cdot x$$



rastezanje za koje više ne vrijedi linearna ovisnost („Hookeov zakon“)

točka pucanja/trajne deformacije

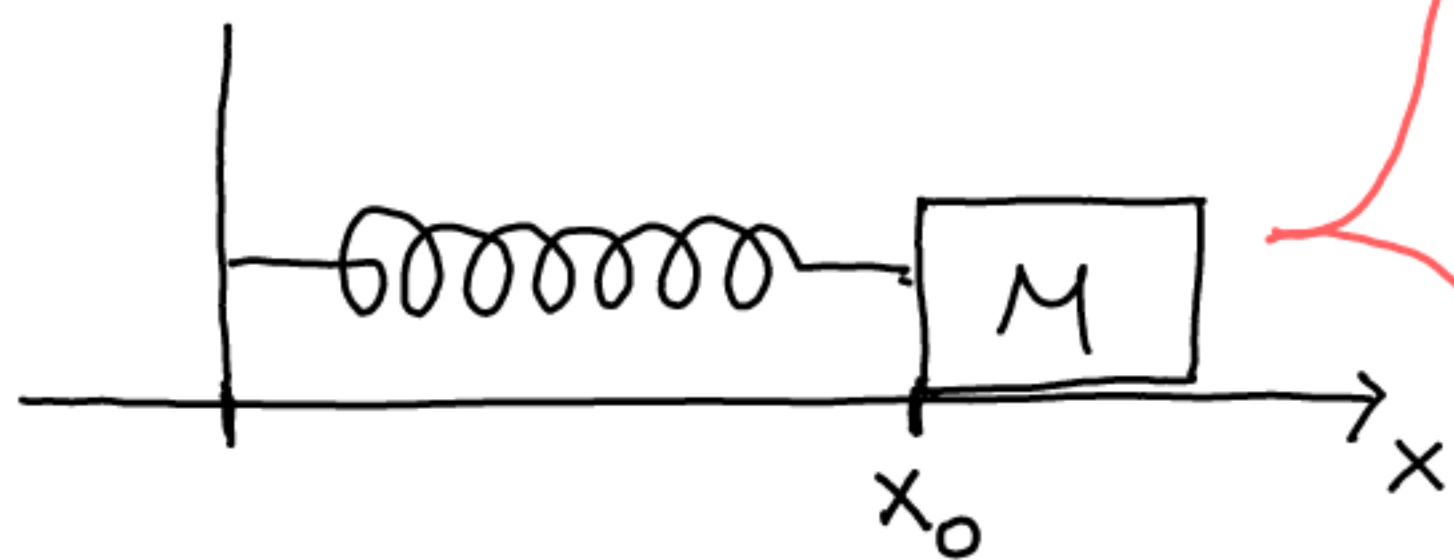
sabijanja stvari od njihovog „ravnotežnog“ oblika, tj. od oblika kojeg imaju kada na njih ne djeluju vanjske sile, i „težnje“ tih stvari da taj (ravnotežni) oblik zadrže, tj. povrate...

- ta sila je rezultat fundamentalnih EM međudjelovanja među atomima i SVA tijela su (barem mrvicu) elastična
- na početku je ovisnost LINEARNA o promjeni duljine (Δl ili Δx), to se zove HOOKEOV ZAKON, a konstantu proporcionalnosti „ k “ zovemo:

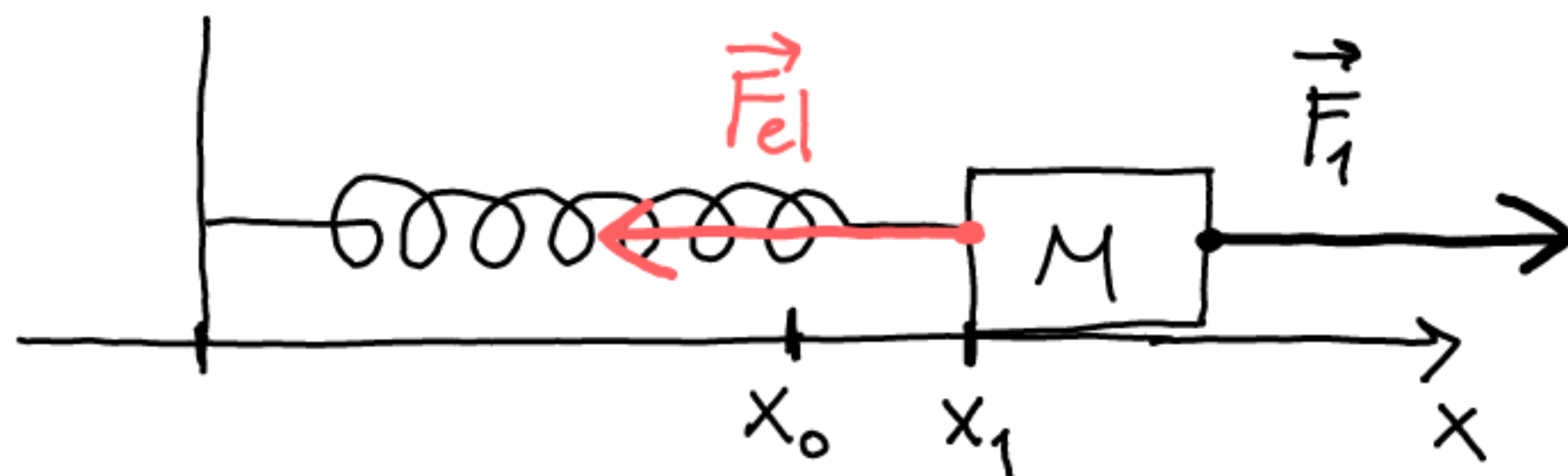
KONSTANTA ELASTIČNOSTI

Što je konst. elastičnosti veća to je predmet/opruga „tvrdi“, tj. veća sila je potrebna da ju se „sabije“ ili rastegne za istu količinu

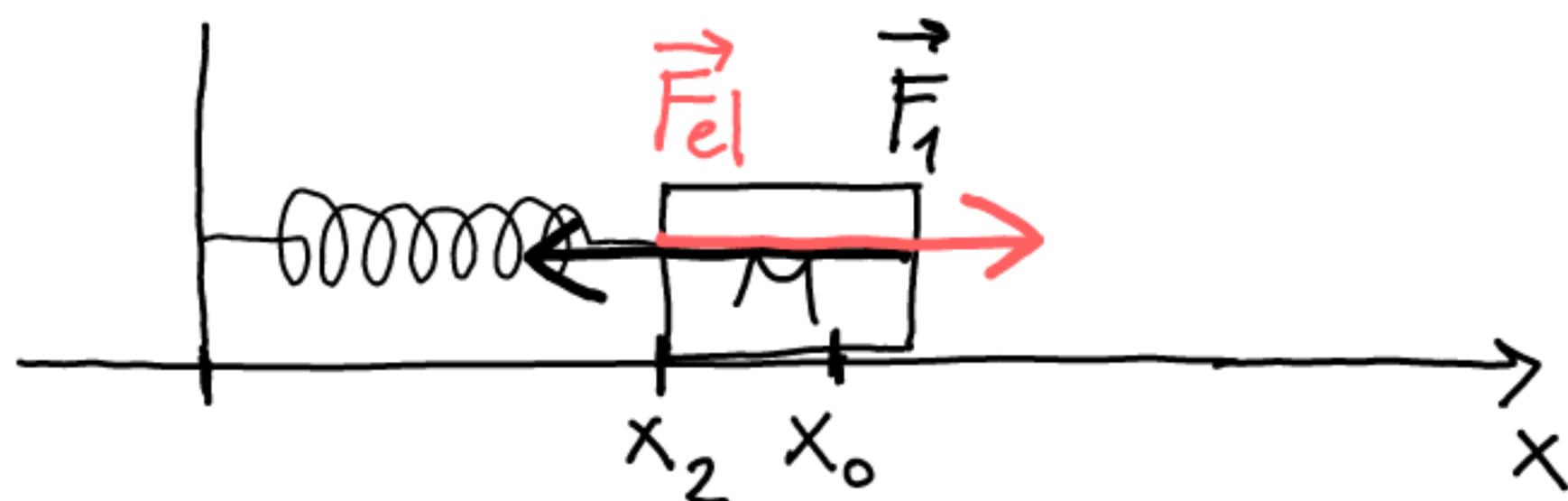
– tipični model: OPRUGA (FEDER, engl. SPRING)



pretpostavka: trenje
između M i podloge
je $\approx 0 \dots$



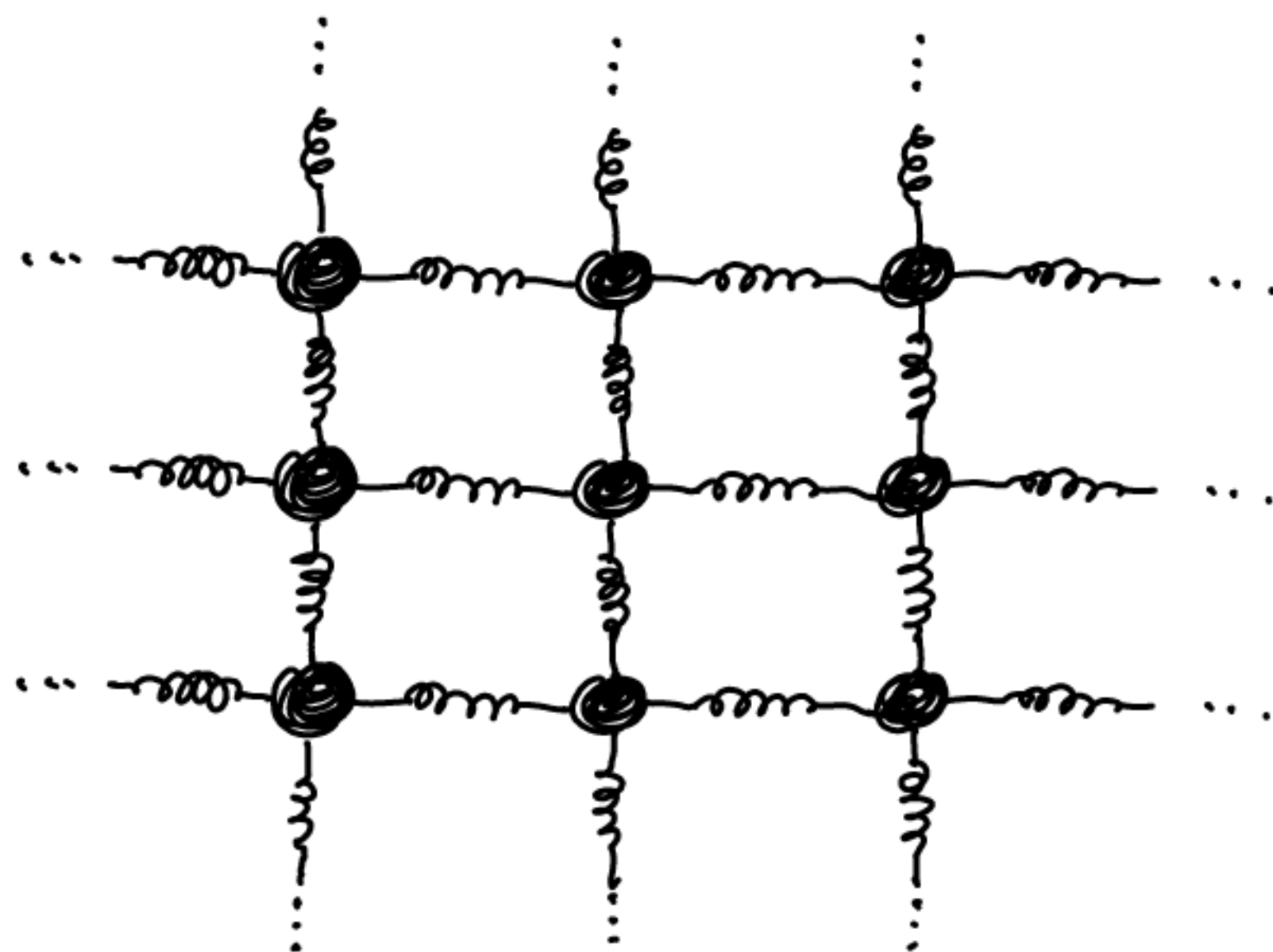
$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_1 = 0 \rightarrow \vec{F}_1 = k \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{>0} \hat{x}$$



$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_1 = 0 \rightarrow \vec{F}_1 = k \cdot \underbrace{(x_2 - x_0)}_{<0} \hat{x}$$

– interakcije između atoma u krutim stvarima
mogu se približno dosta dobro za većinu situacija
opisati kao da su vezani oprugama ...

upr.

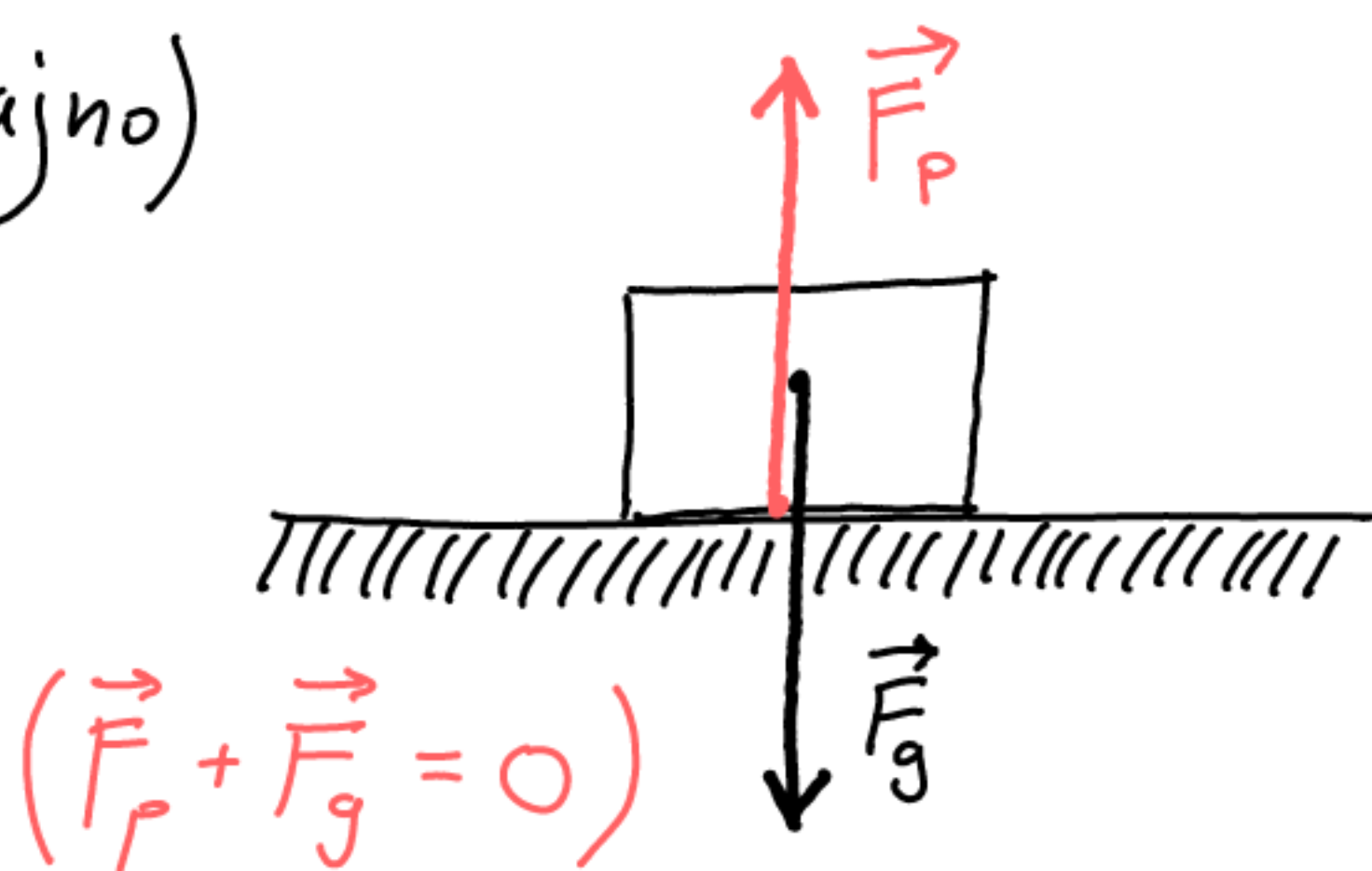
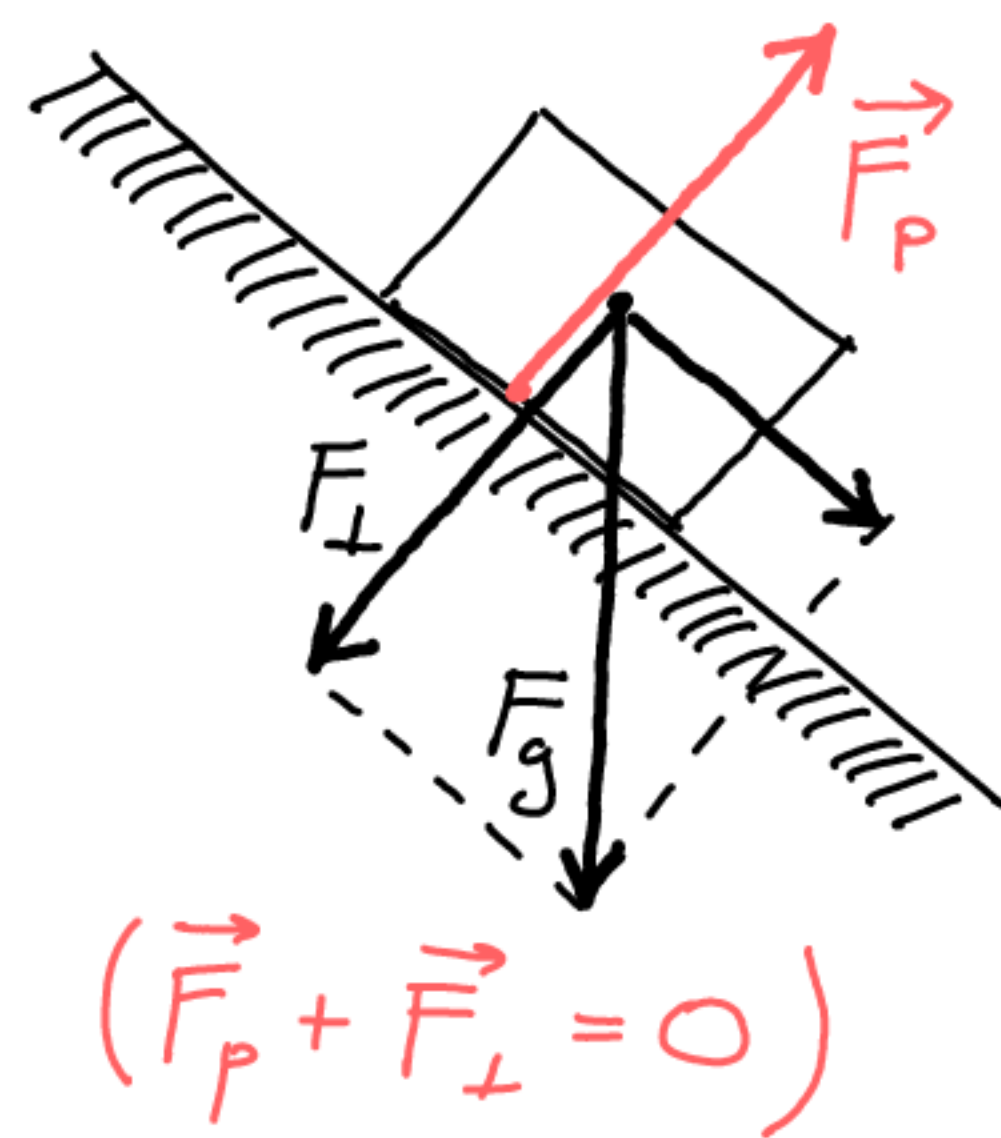


3) SILE REAKCIJE PODLOGE I NAPETOSTI NITI

- sile koje su zapravo idealizacije elastične sile, u smislu da za neku nit ili podlogu uzimamo da je $k \approx \infty$, što u praksi znači da će te sile (reakcije) biti kolike god trebaju biti po 3. N.Z. bez da se podloga/nit deformiraju ($\Delta l = 0$), sve dok se ne zdrobe/puknu (onda tih sila više nema uopće ...)

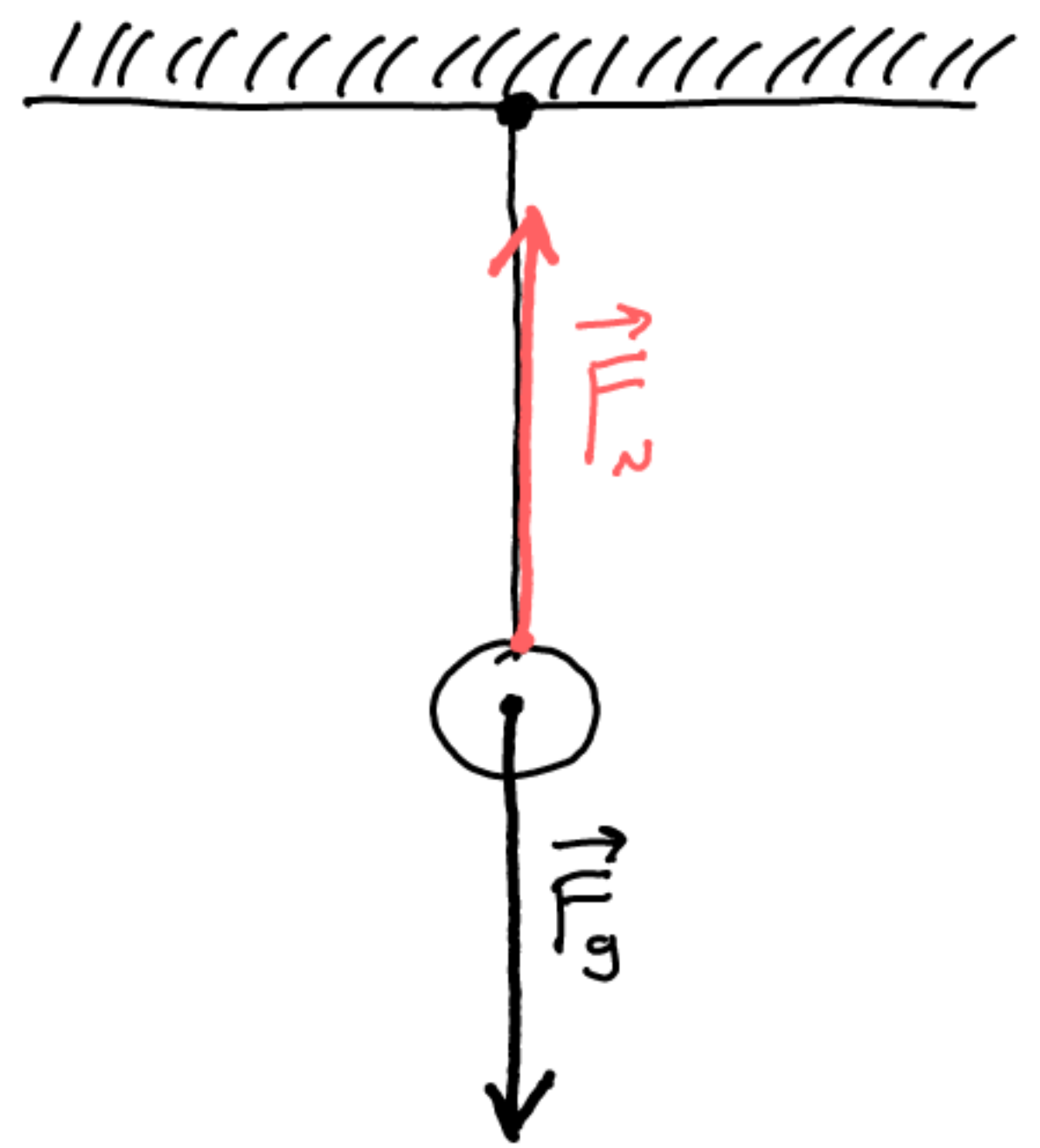
- sila reakcije podloge ($\vec{F}_P$):

↳ djeluje uvijek **okomito** na površinu podloge, onoliko koliko je potrebno da poništi sve sile okomite na podlogu, a bez da se podloga (vidljivo/značajno) deformira ...

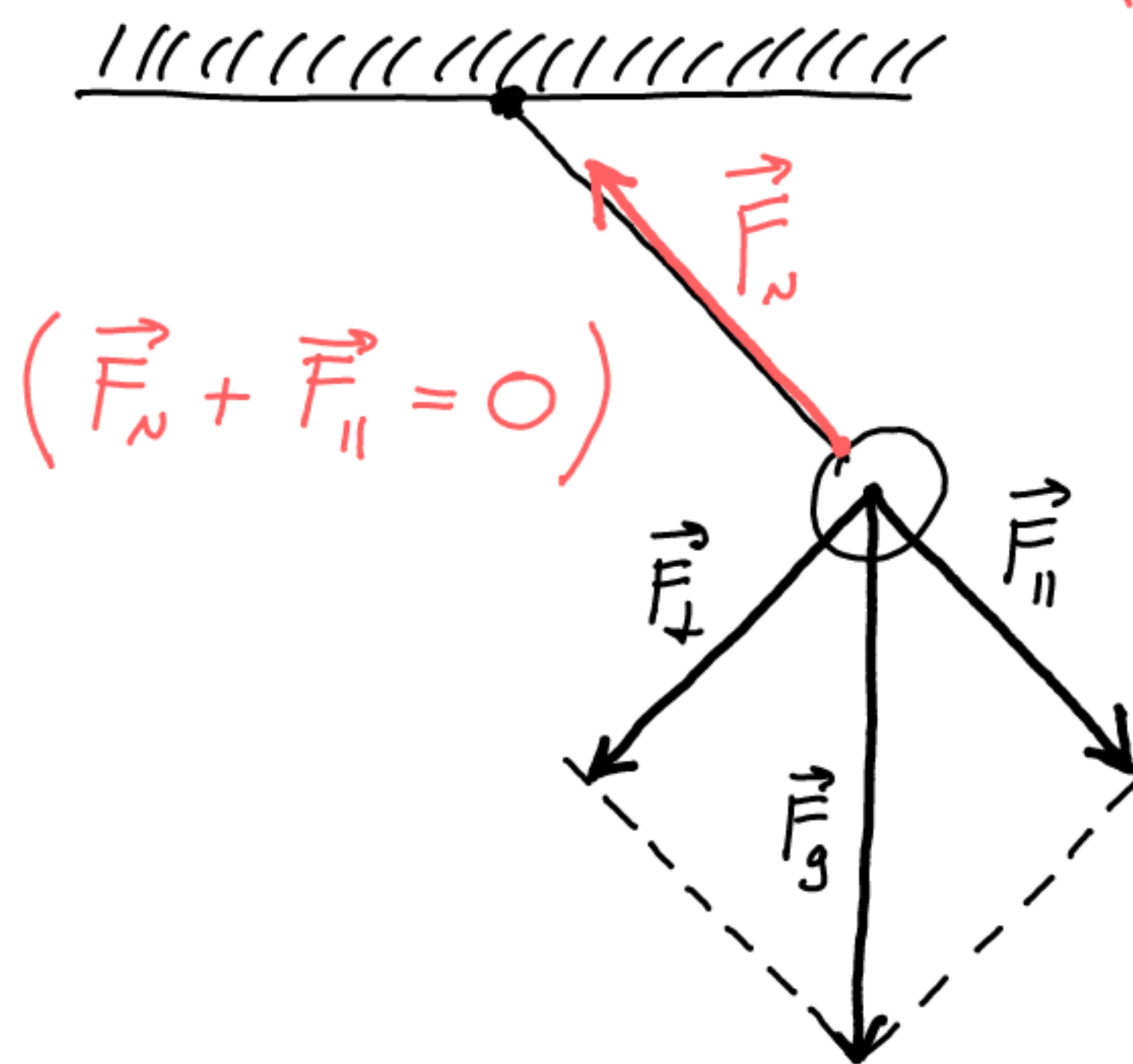


- sila napetosti niti ($\vec{F}_N$): → ili $\vec{T}$ od engl. „tension“

↳ djeluje uvijek u smjeru niti, onoliko koliko je potrebno da poništi sve sile u smjeru niti, a bez da se nit (vidljivo/značajno) rastegne (ili pukne)



$$(\vec{F}_N + \vec{F}_g = 0)$$



$$(\vec{F}_N + \vec{F}_{II} = 0)$$

4) TRENJE (FRICTION)

Ovdje se, kao i
najčešće svugdje
podrazumijeva da
se misli na tzv.

SUHO TRENJE
(dry friction)

- sila koja nastaje između dvije površine
jer jedna „zapije“ za drugu dok se
po njoj kreće (ili bi se „htjela“ pokrenuti)

- ta sila rezultat je fundamentalnih EM
međudjelovanja atoma odvojenih
tijela/površina koje onemogućuju da stvari
prolaze jedne kroz druge ...

- ovisi o fizičkim i kemijskim svojstvima
površina koje su u kontaktu (npr. od čega
su, koliko su glatke itd.)

⇒ FAKTOR TRENJA (μ)

↳ mjeri se za parove materijala i
pretpostavlja da je konstanta, dakle
da ne ovisi o brzini, temperaturi ...

- ovisi i o PRITISNOJ SILI između površina,
a to je za neko tijelo jednako ukupnoj
sili reakcije podloge (F_p) na kojoj se
nalazi ...

⇒
$$F_{tr} = \mu \cdot F_p$$
 !



Razlikuje se STATIČKO i DINAMIČKO trenje...

→ STATIČKO se javlja dok tijelo miruje kao OTPOR POKRETANJU

$$\Rightarrow F_{tr,s} \leq \mu_s \cdot F_P$$

(iznos se mijenja,
prilagođava vanjskoj
sili ...)

→ smjer suprotan od smjera
u kojem bi se tijelo gibalo
da nema trenja...

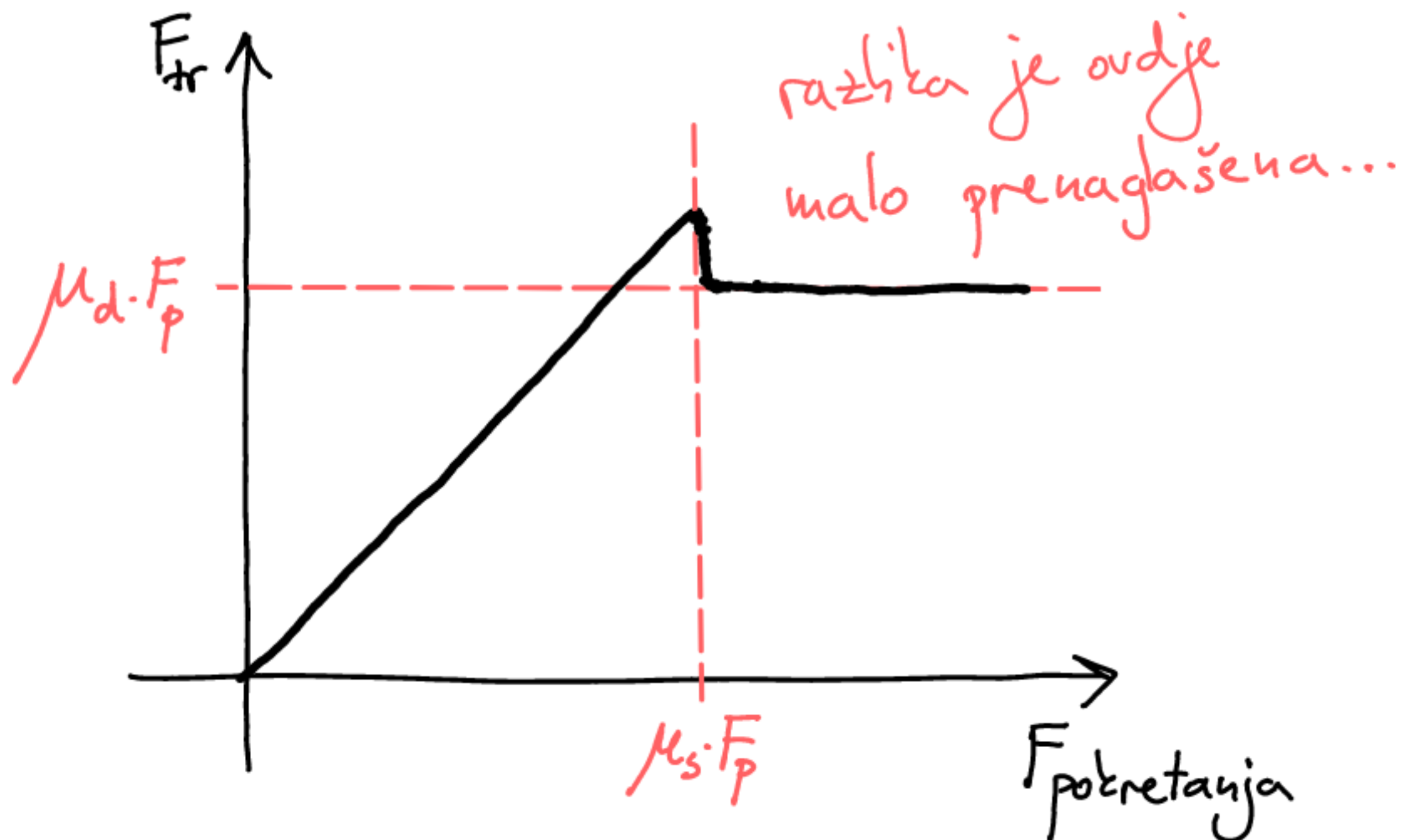
→ DINAMIČKO se javlja kao OTPOR GIBANJU tijela u pokretu

$$\Rightarrow F_{tr,d} = \mu_d \cdot F_P$$

→ smjer UVIJEK suprotan
smjeru vektora brzine !

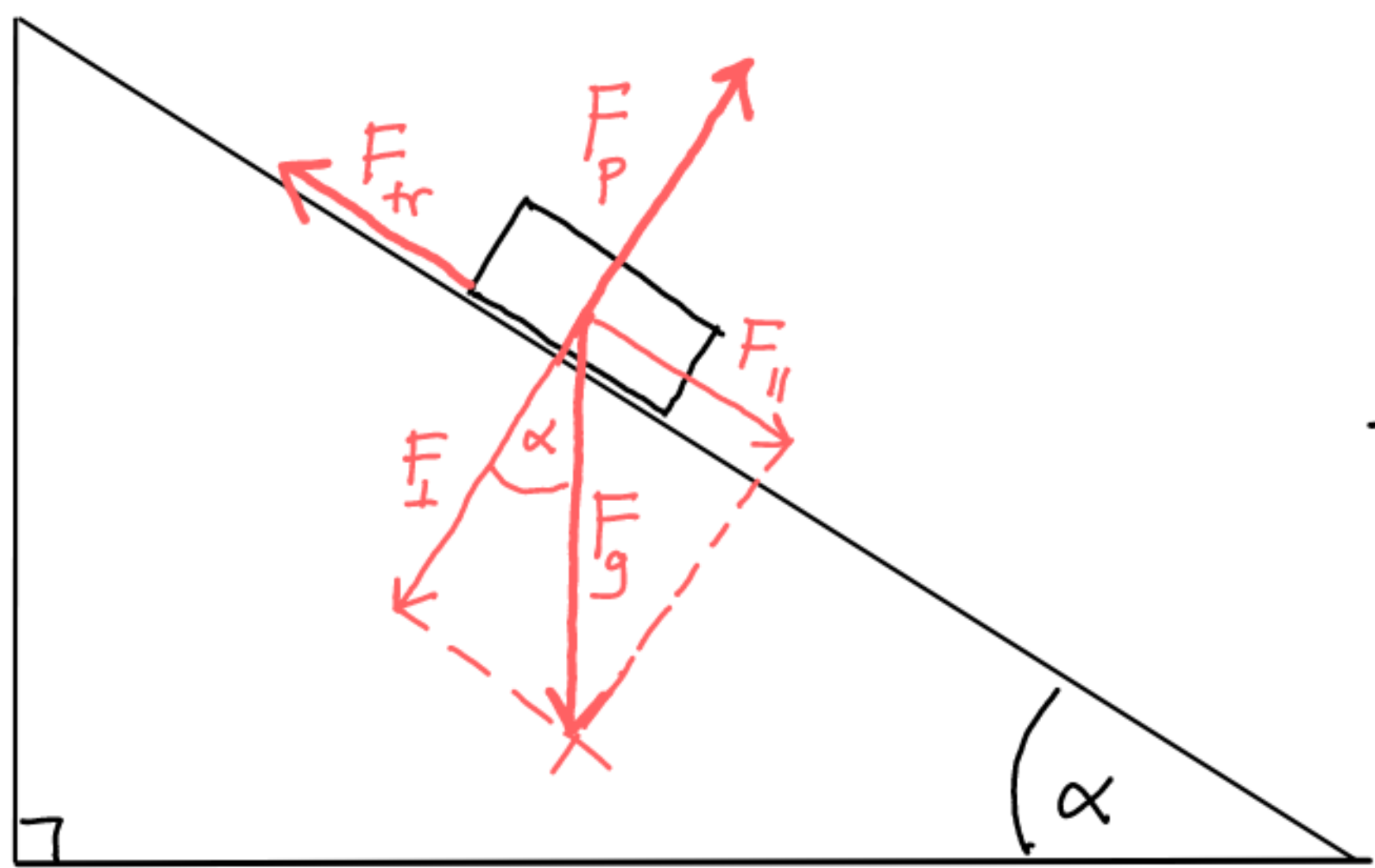
$$\Rightarrow \underline{\vec{F}_{tr} = -\mu \cdot F_P \cdot \hat{v}}$$

→ Statičko je u pravilu veće od dinamičkog ($\mu_s \geq \mu_d$)...



Sve do sada rečeno odnosi se na trenje KLIZANJA...

Primjer:



$$\vec{F}_P + \vec{F}_\perp = m \cdot a_\perp = 0$$

$$\rightarrow F_P = F_\perp = F_g \cdot \cos(\alpha)$$

$$m \cdot a_{||} = \vec{F}_{||} + \vec{F}_{tr}$$

$$m \cdot a_{||} = F_g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot F_P$$

$$m \cdot a_{||} = F_g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot F_g \cdot \cos(\alpha)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{a_{||} = g(\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha))}}$$

Trenje KOTRLJANJA (bez proklizavanja) je puno manje od trenja klizanja. Može se opisati istim zakonom s efektivnim koeficijentom trenja za kotrljanje (μ_{roll} - rolling friction coef.) koji je puno (100 do 1000 puta) manji.

Kotrljanje je uzrokovano „običnim“ trenjem (moment sile - o tome više kasnije).

KOLIČINA GIBANJA (MOMENTUM)

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

→ umnožak mase i brzine tijela;
što je nešto teže i što brže ide to
ga je teže zaustaviti ...

→ VEKTORSKA veličina ! VAŽNO NE ZABORAVITI !

→ FUNDAMENTALNA veličina u fizici/prirodi, puno više
nego brzina ili masa, iako se to trenutno teško
može pokazati (bude očito u naprednijoj i modernoj
fizici – specijalna teorija relativnosti i kvantna fizika).

Neke indikacije, doduše, postoje ...

„Stvarni” oblik 2. Newtonovog zakona:

!
$$\vec{F}_{uk} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad \left(\text{tj. } \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{uk} &= m \cdot \vec{a} = \\ &= m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \\ &= m \cdot \frac{(\vec{v}_k - \vec{v}_p)}{(t_k - t_p)} = \\ &= \frac{(m \cdot \vec{v}_k - m \cdot \vec{v}_p)}{(t_k - t_p)} = \end{aligned}$$

U ovom obliku zakon je „točiji” ako bi
uzeli u obzir mogućnost da se mijenja masa
tijela kojega promatramo ... Npr. gorivo se troši (auto/raketa/...)
ili se tijelo raspada u gibanju itd.

→ IMPULS SILE - rezultat djelovanja neke VANJSKE sile $\vec{F}_v$

$$\vec{I} = \vec{F}_v \cdot \Delta t$$
$$(\quad = \Delta \vec{p} \quad)$$

- promjena količine gibanja sustava zbog $\vec{F}_v$

- postoji kao pojam, ali nije previše bitan, može se i bez njega...

⇒ ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA:

U ZATVORENOM sustavu (bez VANJSKIH sila, tj. bez utjecaja okoline) UKUPNA količina gibanja se NE MJEŃA!

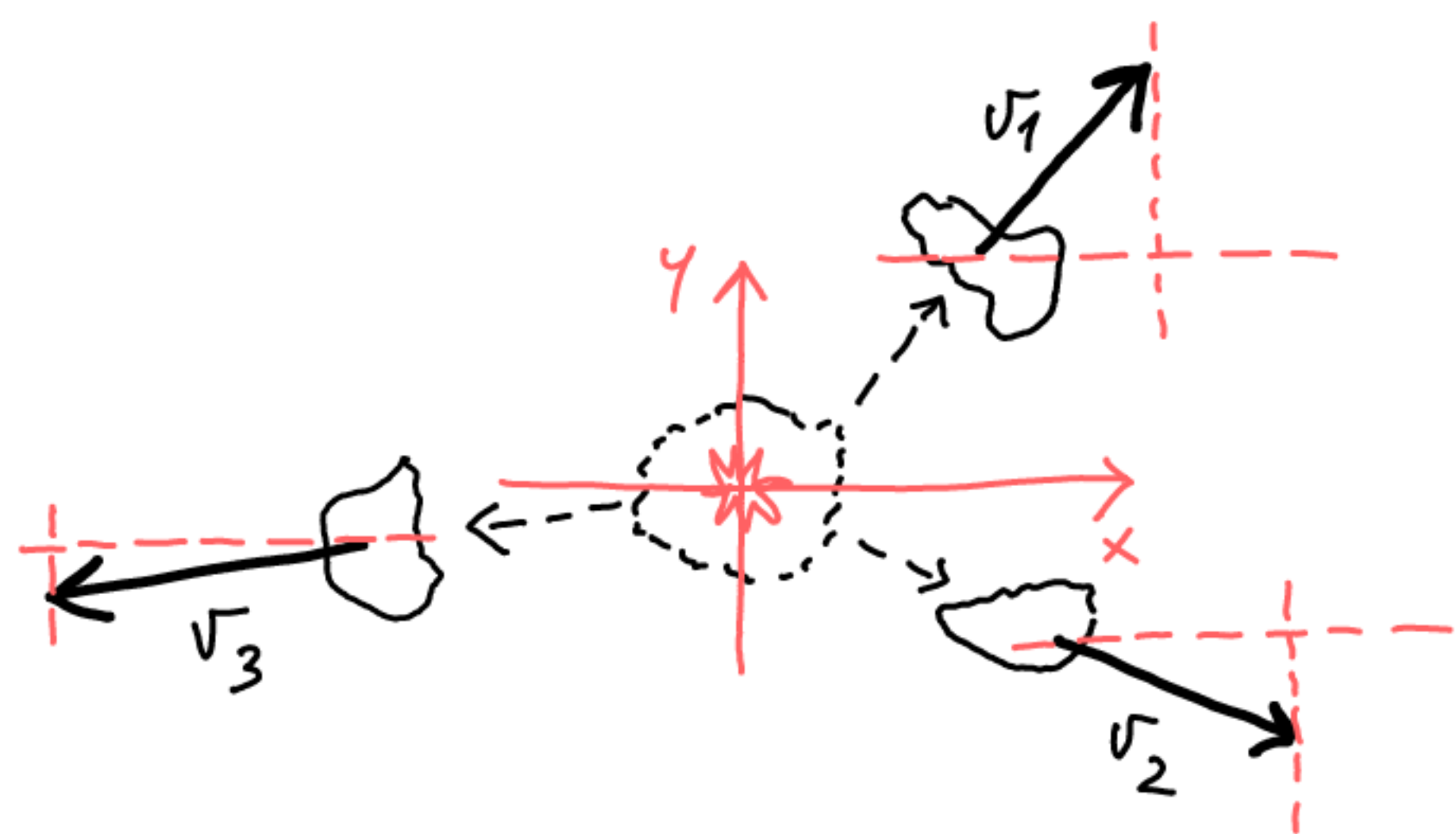
$$\vec{F}_{uk} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}; \quad \vec{F}_{uk} = 0 \text{ jer postoje samo UNUTARNJE SILE ...}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{p} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_{prije} = \vec{p}_{poslije}} \text{ (za svaki } \Delta t \text{)}$$

→ jedan od samo nekoliko TEMELJNIH zakona fizike, koji uvijek vrjede bez iznimke (za razliku od upr. zakona očuvanja mase iz kemije itd.)

Primjeri primjene: sudari, raspadi/eksplozije, reakcije, ...

Primjer 1: eksplozija i raspad na dijelove (npr. u svemiru)



$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= v_{1x} \cdot \hat{x} + v_{1y} \cdot \hat{y} \\ \vec{v}_2 &= v_{2x} \cdot \hat{x} + v_{2y} \cdot \hat{y} \\ \vec{v}_3 &= v_{3x} \cdot \hat{x} + v_{3y} \cdot \hat{y}\end{aligned}$$

< 0
(po skici)

$$\vec{p}_{\text{poslije}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{p}_{\text{prije}} = \underline{\underline{0}}!$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

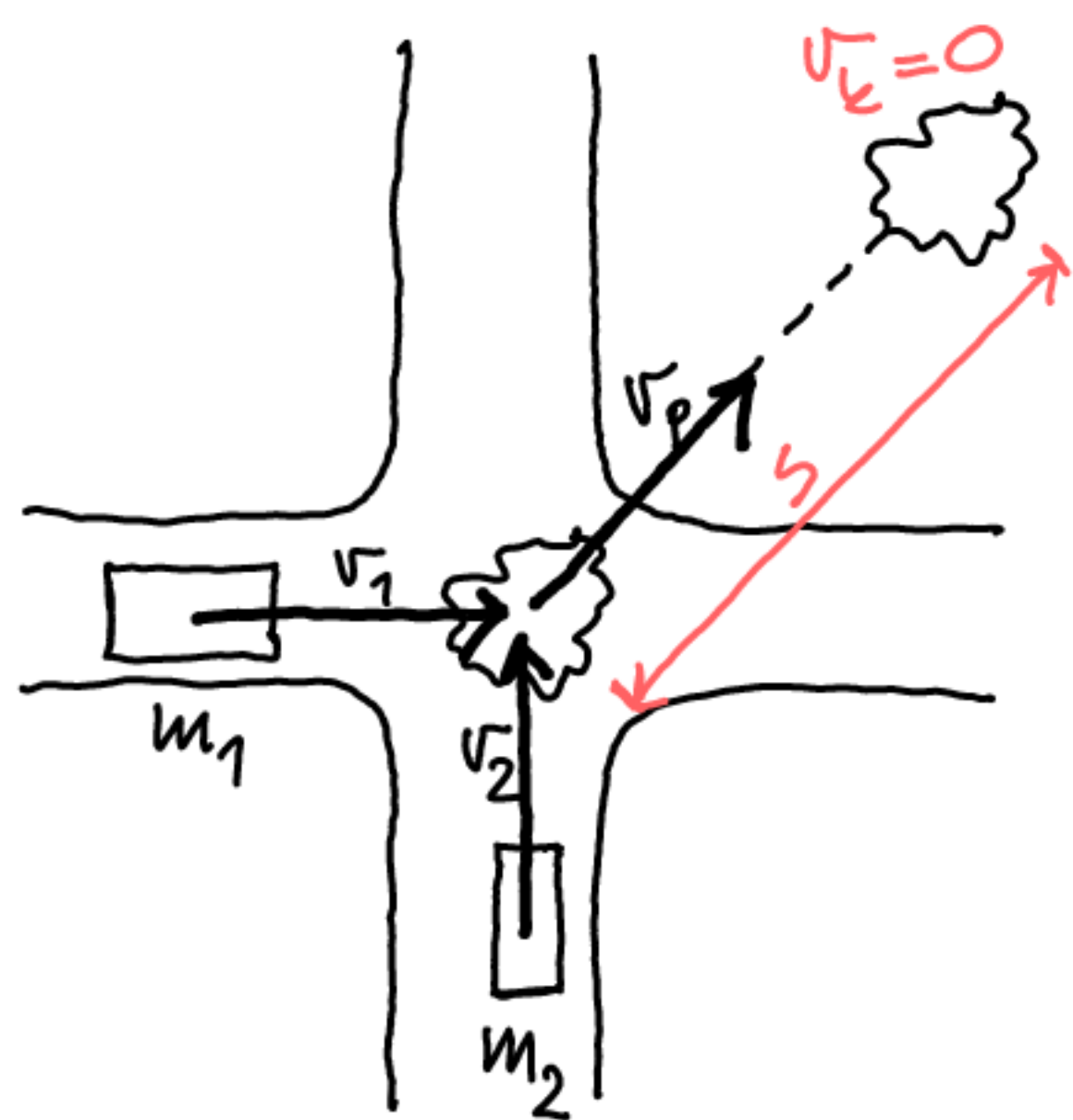
„vektorska“ jednačica
mora biti zadovoljena
za svaku komponentu



$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} + m_3 \cdot v_{3x} = 0 \\ m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y} + m_3 \cdot v_{3y} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ zapravo 3 jednačbe (za 3D svijet, u ovom primjeru 2)

Primjer 2: Kolika je bila brzina auta 2 prije sudara??



$$m_1 = 1300 \text{ kg}; v_1 = 60 \text{ km/h}$$

$$m_2 = 1700 \text{ kg}; v_2 = ?$$

$$s = 25 \text{ m}; \mu_{\text{tr}} = 0.6 \quad (\text{trenje nakon sudara})$$

$$\vec{p}_{\text{prije}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\text{poslije}} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_p$$

$$\Rightarrow (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 = (m_1 + m_2) \cdot \underline{\underline{v_p^2}}$$

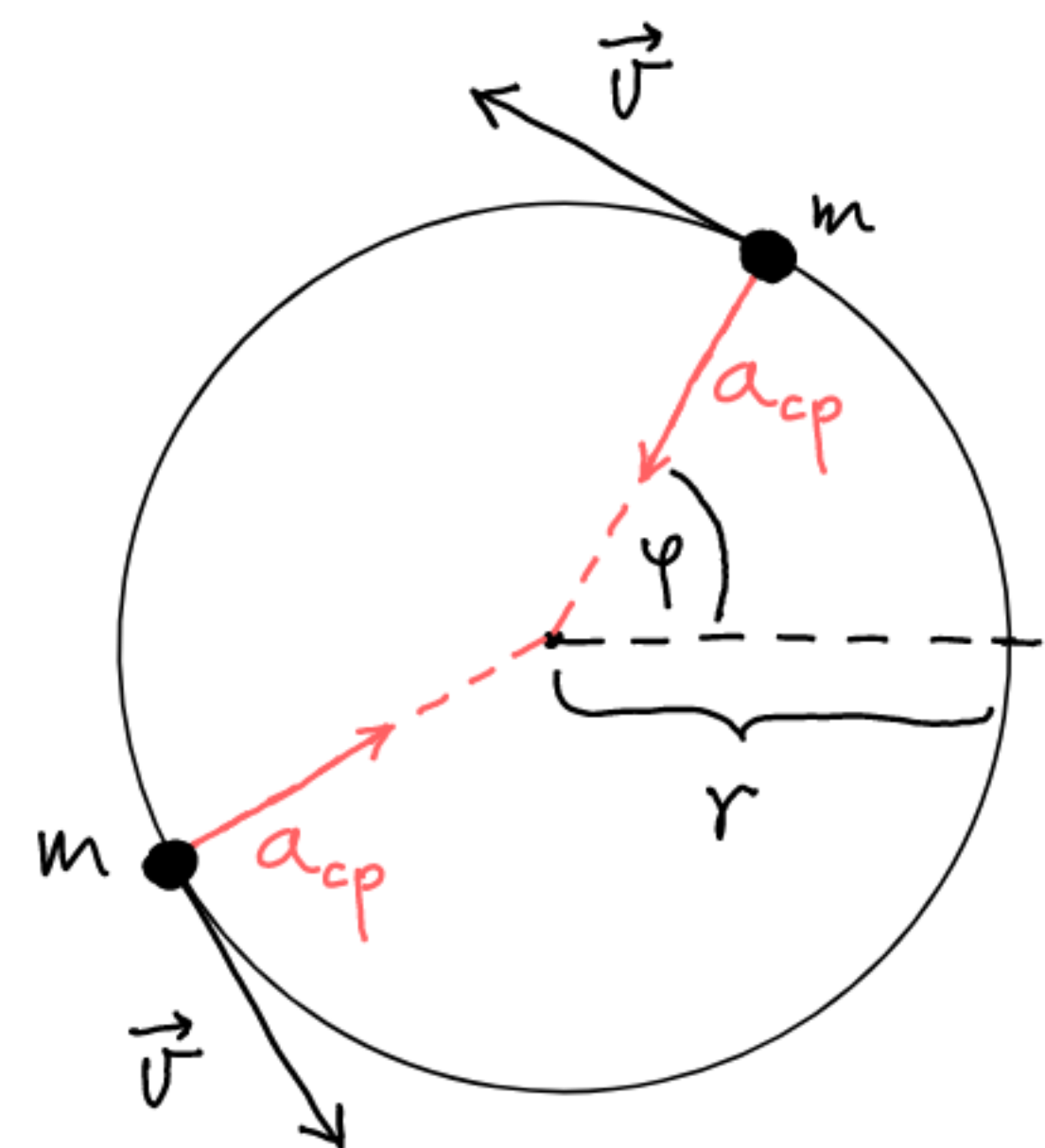
$$\Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 \cdot 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s - m_1^2 v_1^2}}{m_2} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_k^2 - v_p^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

$$(m_1 + m_2) \cdot a = F_{\text{tr}}$$

DINAMIKA ROTACIJA

Ponavljanje - kinematika kružnog gibanja ...



→ kružno gibanje se može opisati preko kuta (φ) i promjene kuta u vremenu, tj. kutne brzine ($\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$)

→ stvarna brzina $\vec{v}$ je stalno tangencijalna i promjena njegovog smjera opisana je centripetalnom akceleracijom ($a_{cp} = \frac{v_t^2}{r}$) koja je uvijek usmjerena prema središtu

podsjetnik:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \leftarrow \text{period}$$

$$v_t = \frac{2\pi r}{T} = \omega \cdot r$$

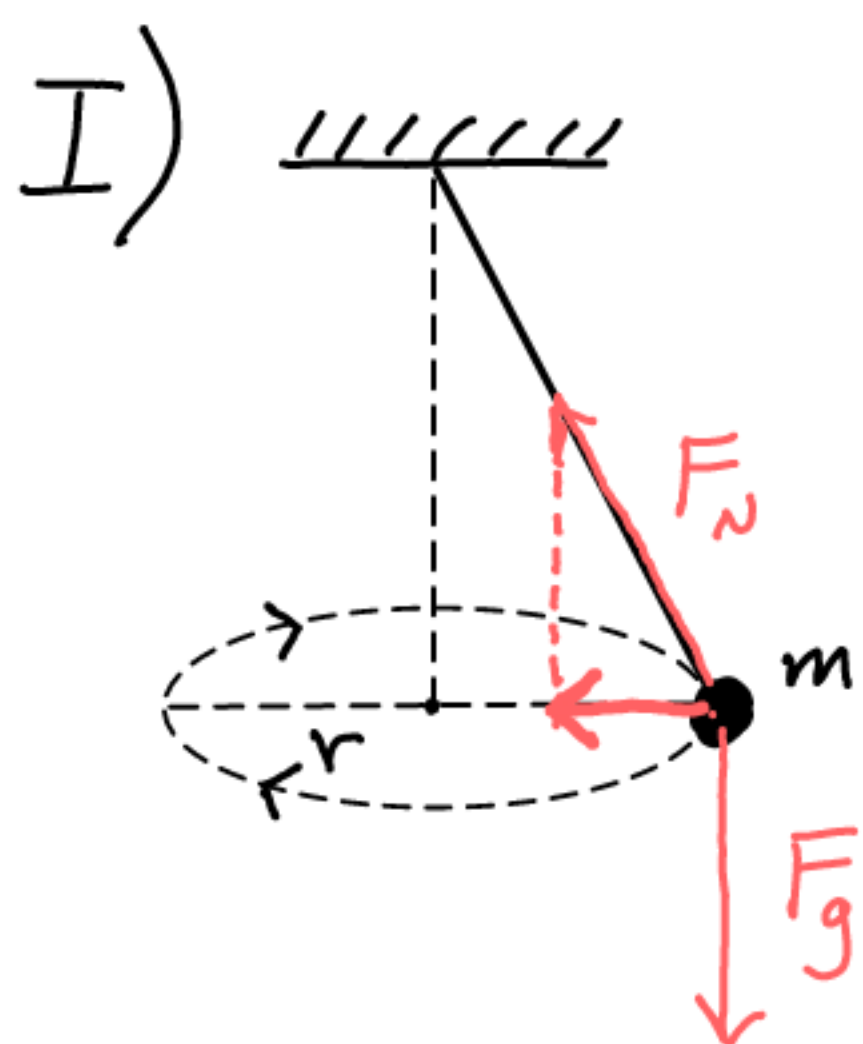
⇒ CENTRIPETALNA SILA je ono što „sreće” tijelo mase m da bi se gibalo u krug... Po 2. Newtonovom zakonu:

$$\Rightarrow \boxed{F_{cp} = m \cdot a_{cp} = \frac{m \cdot v_t^2}{r}} \quad !$$

→ tu „ulogu” mogu imati razne sile, npr. napetost niti (kamen na užetu), gravitacijska sila (Mjesec oko Zemlje), unutarnje sile u krutom tijelu (npr. štapa) koji se vrti ...

Kad god se nešto giba po kružnici (jednoliko) to nužno znači da je REZULTANTNA (ukupna) sila na tijelo usmjerena prema SREDIŠTU kružnice po kojoj se to nešto giba - to je centripetalna sila $\left(\frac{m \cdot v^2}{r}\right)$!

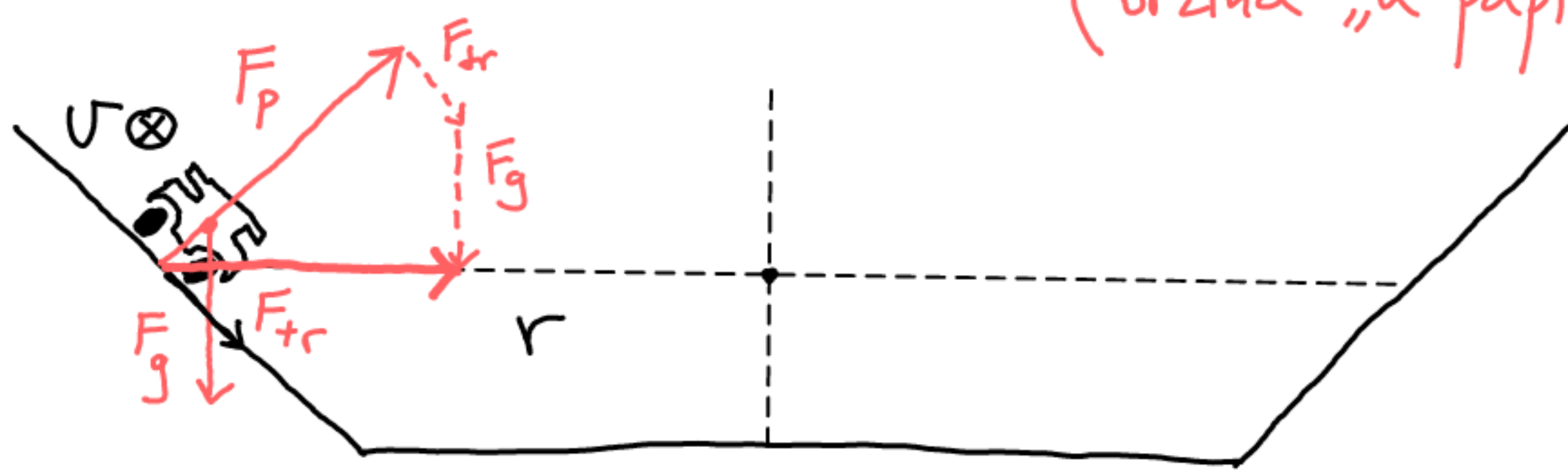
Primjeri:
(3D)



$$\vec{F}_g + \vec{F}_n = \vec{F}_{cp} ; |\vec{F}_{cp}| = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

→ Što se "jače" vrti to je veći "r" i veća napetost niti !

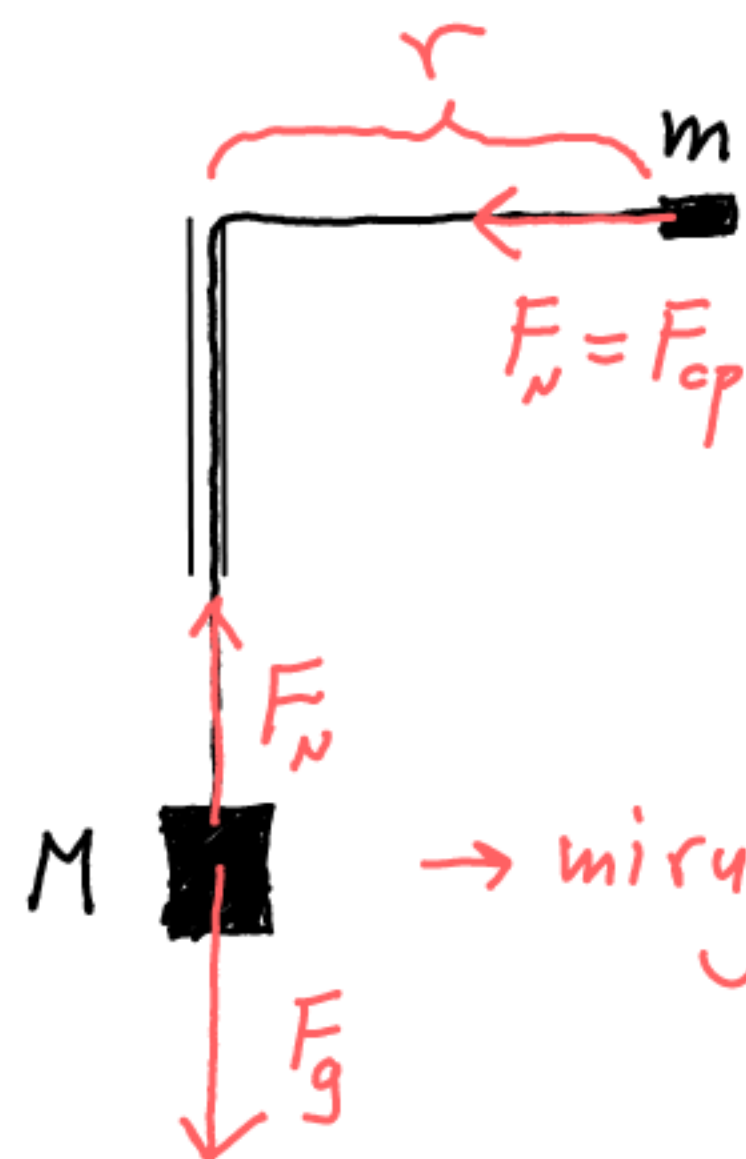
II) Vozilo na nakošenoj kružnoj stazi ...
(brzina "u papir")



$$\vec{F}_g + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_p = \vec{F}_{cp} ; |\vec{F}_{cp}| = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

→ što auto brže ide to mora biti veće (statičko, bočno) trenje i sila reakcije podloge (dakle i pritiska), da ostane isti r !

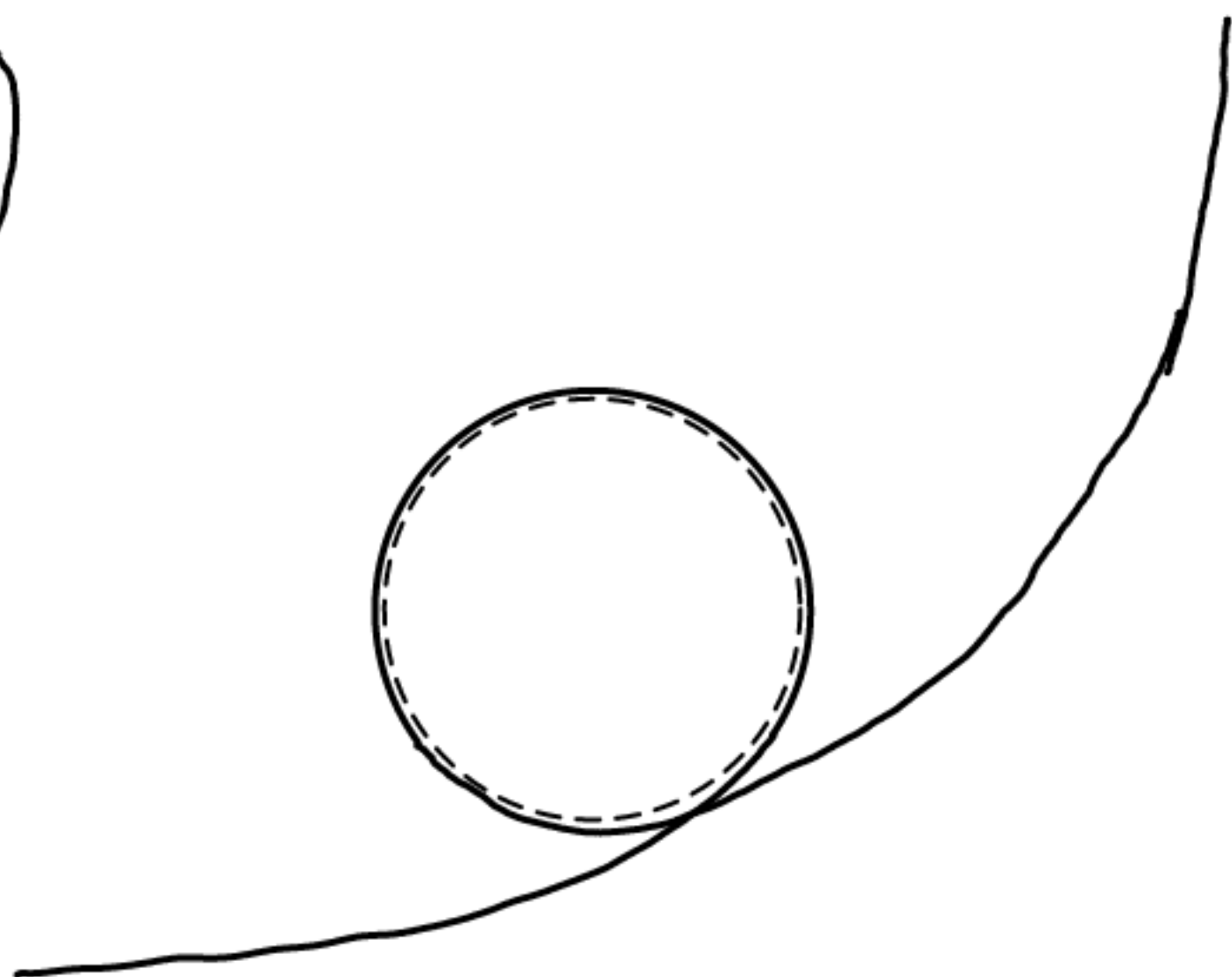
III)



→ jednoliko kruži, jer $\vec{F}_{uk} = \vec{F}_n$ prema središtu kruženja ($= F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$)

→ miruje, jer $\vec{F}_{uk} = \vec{F}_n + \vec{F}_g = 0$

IV)



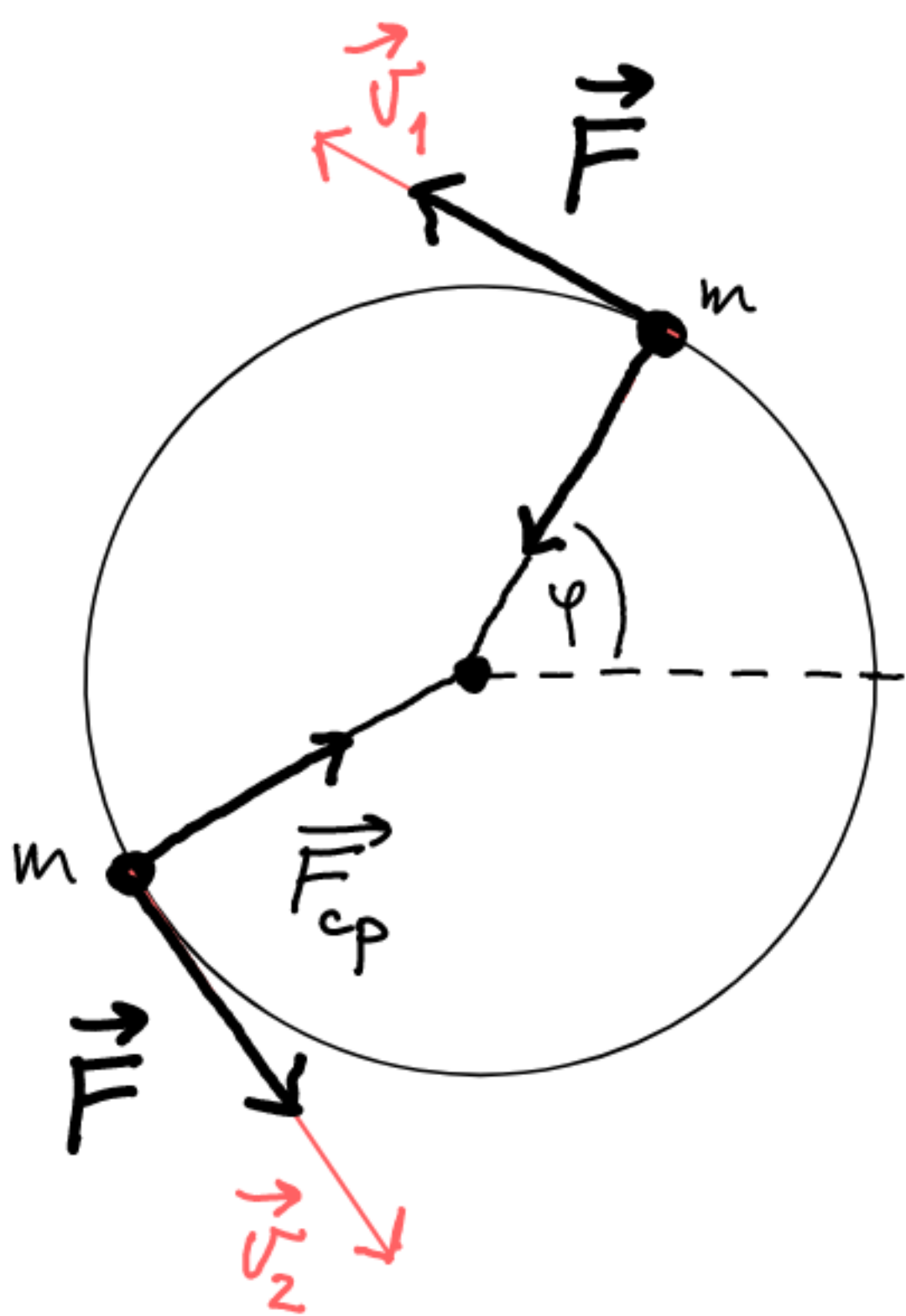
TODO

2 stvari za primijetiti (za kasnije):

I) Centripetalna sila je „vanjska“ i stalno mijenja količinu gibanja tijela koje se vrti... ($\Delta p = F_{cp} \cdot \Delta t$)
Jer iako se iznos količine gibanja ($|\vec{p}| = m \cdot |\vec{v}|$) ne mijenja, mijenja joj se SMJER, jer se stalno mijenja smjer brzine.

II) Što se događa, ako postoji „dodatna“ sila (uz F_{cp}) koja djeluje u SMJERU brzine?

Ta sila bi, očito, povećavala tangencijalnu i kutnu brzinu, dakle ubrzavala bi rotaciju (brzinu kruženja)...



$$a_t = \frac{\Delta |\vec{v}_t|}{\Delta t} = \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \frac{\Delta (r \cdot \omega)}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \text{ - KUTNA AKCELERACIJA (ubrzanje kruženja!)}$$

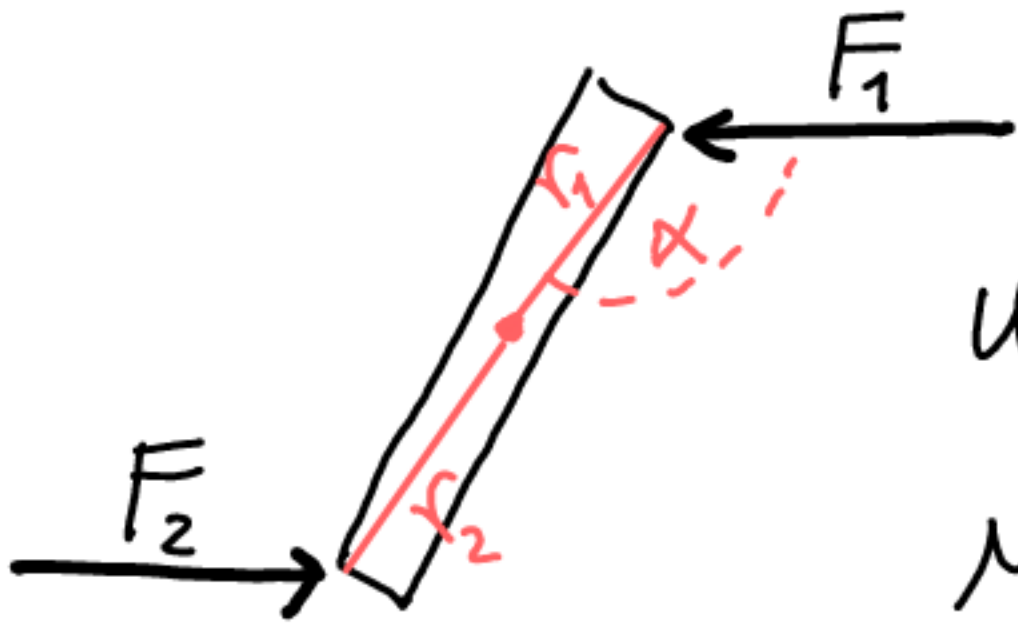
$$\Rightarrow F = m \cdot a_t = m \cdot r \cdot \alpha \quad (2. N. z.)$$

(vidi't ćemo kasnije što s tim...)

ROTACIJE KRUTIH TIJELA

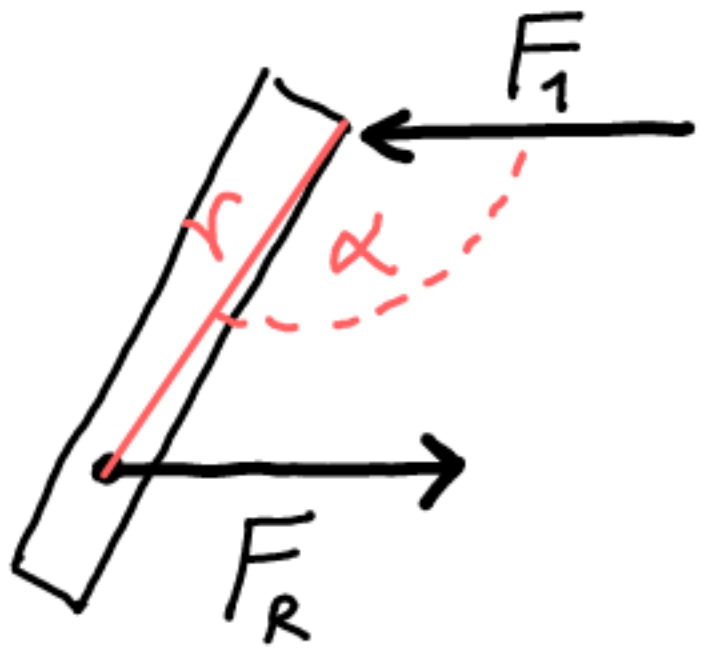
Što ako PAR jednakih sila djeluje na jedno tijelo u suprotnim smjerovima?

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| ; \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{uk} = \underline{\underline{0}}$$



Ukupna sila na tijelo je NULA, ali ono ne miruje!
Njegov CENTAR MASE miruje, ali ono se OKREĆE oko tog centra mase...

Što ako je tijelo fiksirano u jednoj točki? Onda bi se



počelo okretati oko te točke, a sile u toj točki (sile reakcije; $\vec{F}_R = -\vec{F}_1$) bi spriječavale da se tijelo pomije u cijelosti (u daljinu).

Što te sile djeluju BLIŽE točki oko koje će se tijelo okretati (centar rotacije) to će TEŽE pokrenuti tijelo u rotaciju...

Također, što sile djeluju OKOMITLJE (na spojuicu centra rot. i hvatišta sile) to će LAKŠE pokrenuti tijelo u rotaciju...

⇒ MOMENT SILE:

$$M = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(\alpha)$$

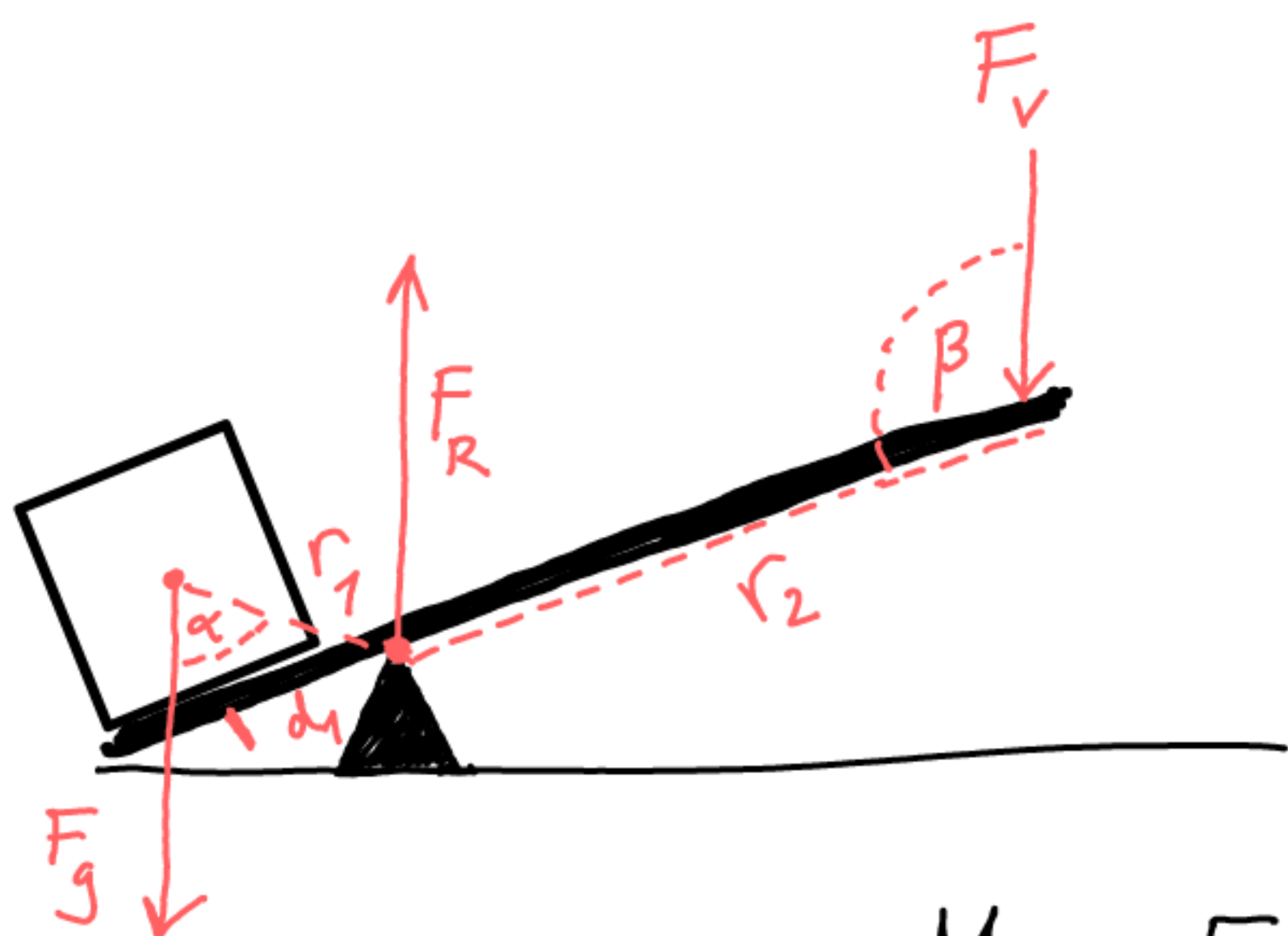
zapravo: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (vektorski umnožak)

MOMENT SILE je ono što uzrokuje rotacije i ono je zapravo VEKTOR ($\vec{M}$) čiji smjer je okomit na ravninu u kojoj se rotacija događa. To je važno zbog „zbrajanja“ više momenata (uzroka rotacije), kako bi se oni koji su u suprotnim smjerovima oduzeli (ali za to je dovoljan zdrav razum i intuicija u jednostavnim slučajevima).

Primer: POLUGA

$\vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{F}_v$ (ako su poluga i uporište dovoljno jaki/čvrsti, jer oni podnose sav teret i sile !)

$\underline{M_v \geq M_t}$ (onda teret ide prema gore...)



$$M_v = F_v \cdot r_2 \cdot \sin(\beta)$$

$$M_t = F_g \cdot r_1 \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot r_1 \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow F_v \geq (m \cdot g) \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

$\beta \approx 90^\circ \rightarrow \sin(\beta) \approx 1$
 $\sin(\alpha) \cdot r_1 = d_1$
 $\hookrightarrow$ može biti $\gg 1$!

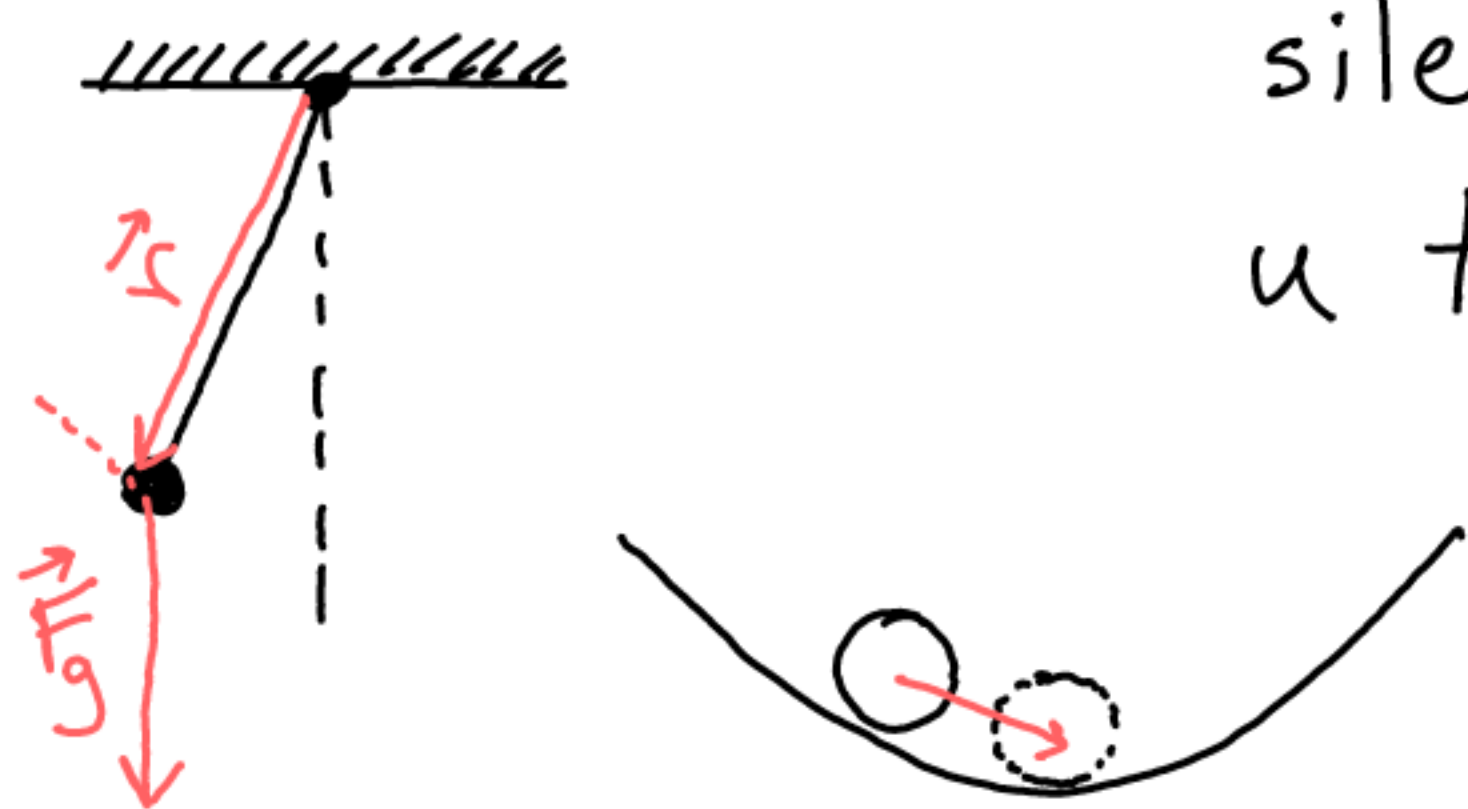
RAVNOTEŽA - mirovanje tijela, tj. sustava

↳ Uvjet ravnoteže: Zbroj svih (vanjskih) sila & zbroj svih

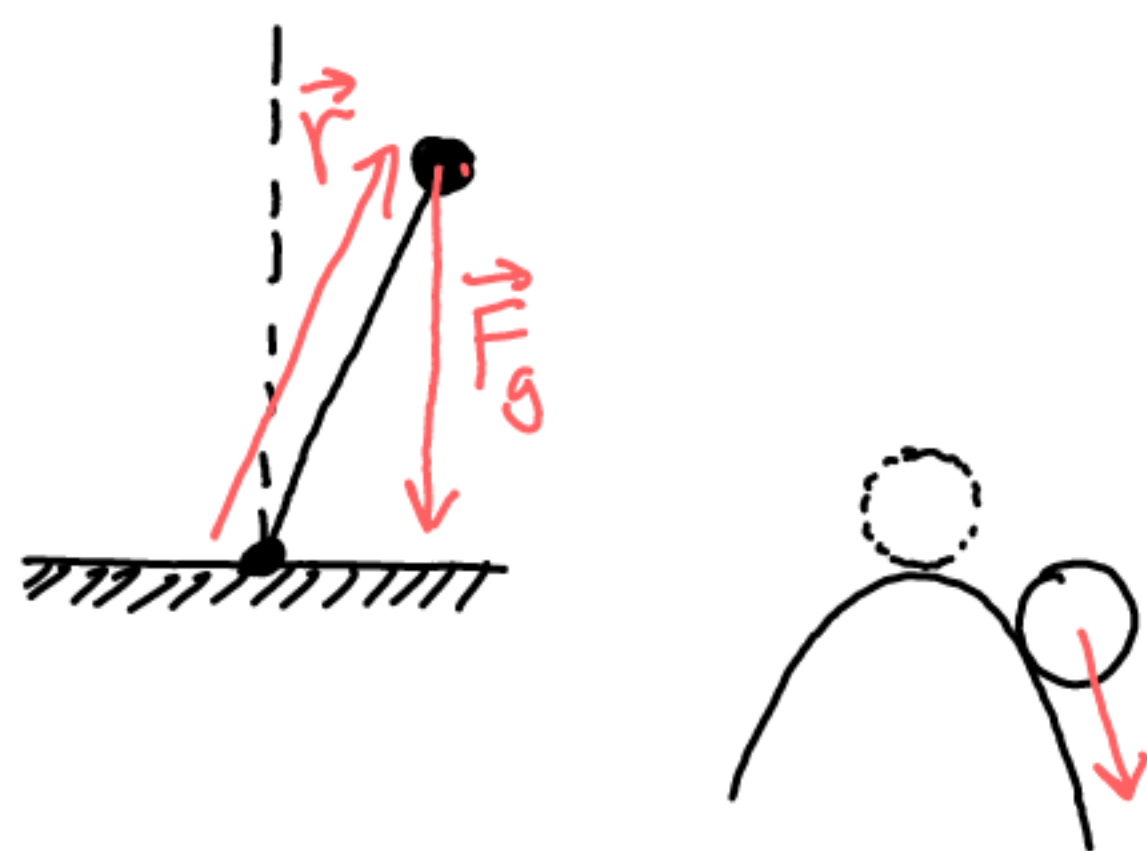
$\sum_i \vec{F}_i = 0$ & $\sum_i \vec{M}_i = 0$ (vanjskih) momenta sila jednak 0 !

→ Vrste ravnoteže:

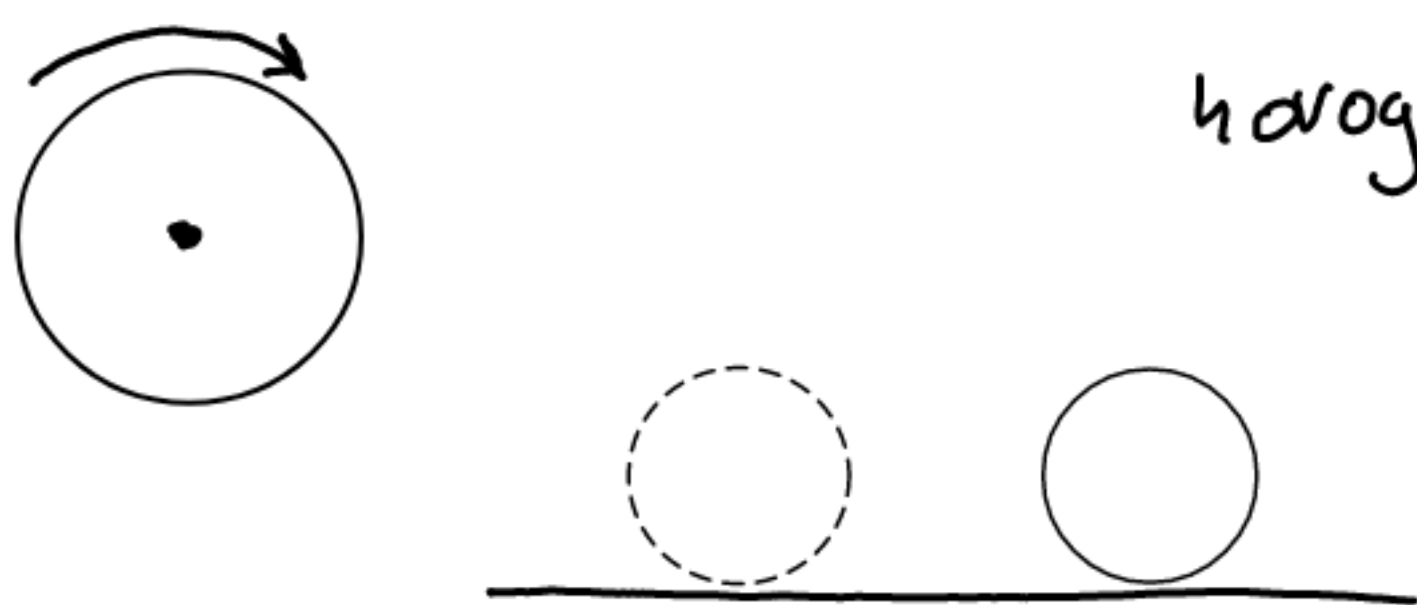
1) STABILNA - kada pomak iz ravnoteže uzrokuje sile i momente sila koje tijelo vraćaju u taj ravnotežni položaj



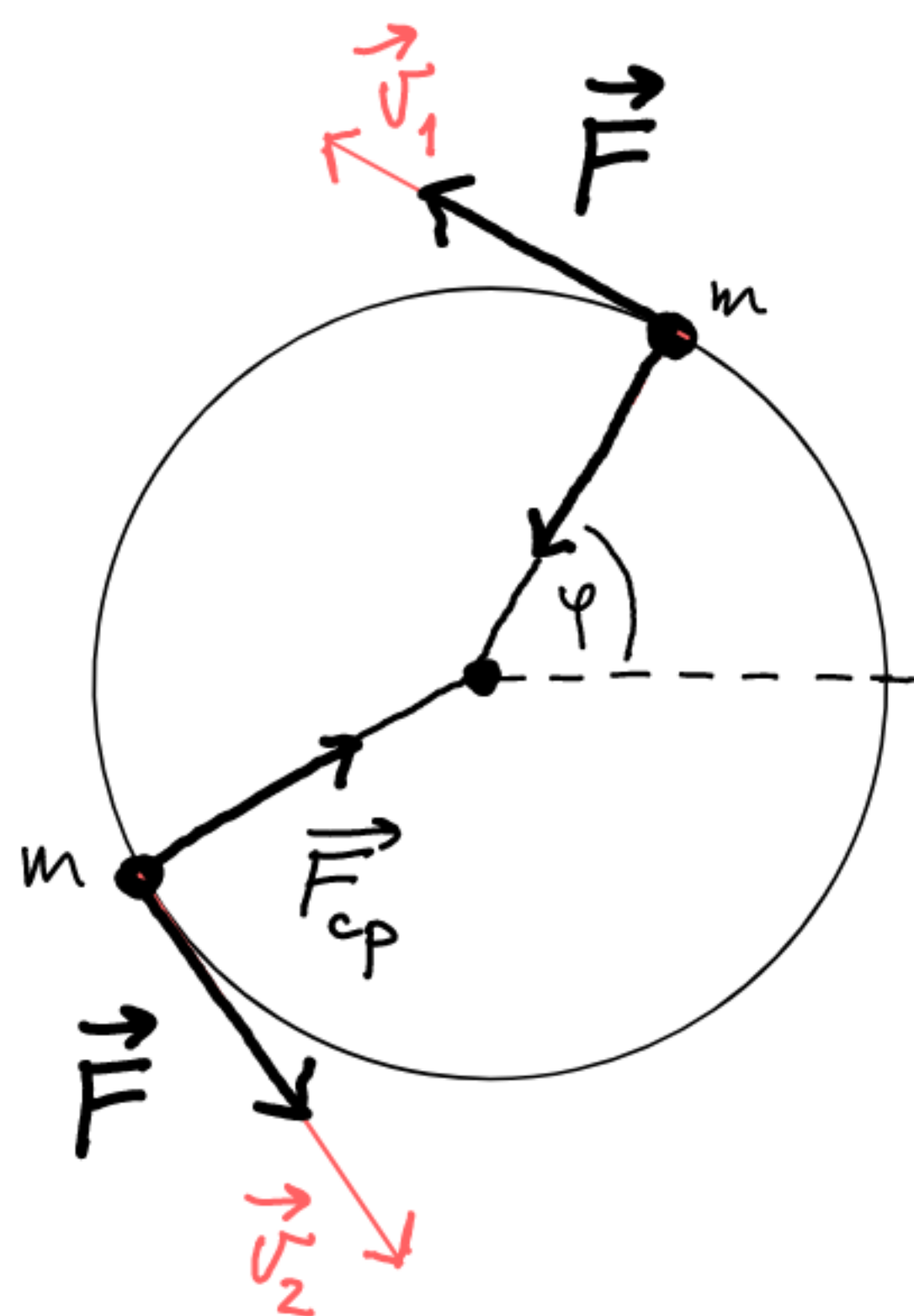
2) LABILNA - kada pomak iz ravnoteže uzrokuje sile i momente sila koje tijelo guraju dalje od/iz položaja ravnoteže



3) INDIFERENTNA - kada pomak iz ravnoteže dovodi do novog/drugog položaj ravnoteže ...



Što, dakle, ako ukupni moment sile nije nula? Stvari se počinju vrtjeti (brže) ... Najjednostavniji model:



$$F = m \cdot a_t = m \cdot r \cdot \alpha \quad (\times r)$$

$$\Rightarrow r \times F = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow M = I \cdot \alpha \quad !$$

2. Newtonov zakon za rotacije:

Ubrzanje kruženja (kutna akceleracija) proporcionalno je MOMENTU SILE, a obrnuto proporcionalno MOMENTU INERCIE !

MOMENT INERCIE ($I [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$) – mjera otpora promjeni brzine kruženja oko neke točke tj. osi; kao MASA, ali za kružno gibanje umjesto pravocrtno (zbog toga takvo ime)

Svako KRUTO TIJELO može se gledati kao nakupina malih masa (npr. atoma) na fiksnim udaljenostima jedne od drugih... Tako mu se onda može odrediti MOMENT INERCIE oko bilo koje točke ili osi rotacije (kao zbroj puno malih $m \cdot r^2$).

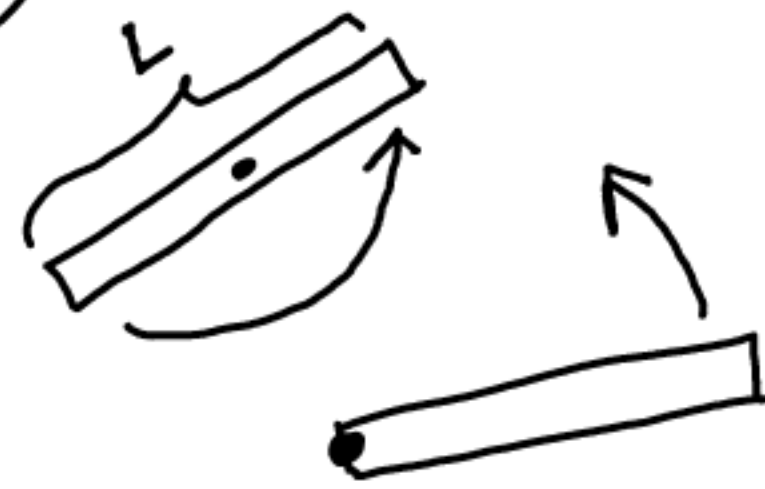
Za općenito 3D kruto tijelo MOMENT INERCije govori o RASPODJEli mase oko neke osi rotacije. Što je veći to znači da je masa u prosjeku dalje od te osi rotacije i da će se tijelo teže oko te osi vrtiti.

U pravilu se mogu odrediti 3 glavna momenta inercije oko 3 glavne osi tijela... Jako teško (u praksi nemoguće) je zavrtiti predmet SAMO oko "srednje" osi (one oko koje moment inercije nije ni najveći ni najmanji).

Primjeri izračunatih momenta inercije:

1) ŠTAP - oko sredine: $\frac{1}{12} m L^2$

- oko kraja: $\frac{1}{3} m L^2$



2) PRSTEN - $I_z = m r^2$; $I_x = I_y = \frac{1}{2} m r^2$

3) DISK - $I_z = \frac{1}{2} m r^2$; $I_x = I_y = \frac{1}{4} m r^2$ (upola od prstena, za istu masu)

4) CILINDAR - $I_z = \frac{1}{2} m r^2$; $I_x = I_y = \frac{1}{12} m (3r^2 + h^2)$

5) SFERA - $I = \frac{2}{3} m r^2$

6) KUGLA - $I = \frac{2}{5} m r^2$ (manje od sfere za faktor 0.6)

Primer primjene - KOTRLJANJE (kako i zašto)

Što uzrokuje kotrljanje? (stičen)

TODO

Moment sile trenja ...

↺ → s proklizavanjem ... $[v_{cm} \neq \omega \cdot r]$

↘ → bez proklizavanja $[v_{cm} = \omega \cdot r]$ - statičko
trenje !

2. Newtonov zakon za rotacije preko količine gibanja:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta (\vec{r} \times \vec{p})}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \quad !$$

KUTNA KOLIČINA GIBANJA ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$; $L = r \cdot p \cdot \sin(\alpha)$)

- u kruženju se količina gibanja stalno mijenja, ne nužno iznosom, ali svakako smjerom ($\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{cp}$ i uz $\vec{M} = 0$)
- kutna količina gibanja je konstantna (i iznosom i smjerom) dok god nema vanjskog MOMENTA SILA!

⇒ ZAKON OČUVANJA KUTNE KOLIČINE GIBANJA !

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{prije} = \vec{L}_{poslije} \text{ za svaki } \underline{\underline{\Delta t}}$$

→ FUNDAMENTALAN (i jako koristan) zakon prirode

→ dakle, ako se BEZ VANJSKOG UTJECAJA promijeni RASPODIJELA mase tijela koje se vrti, promijenit će mu se i brzina vrtuće, i ta promjena je REVERZIBILNA ...

Na primjer, ako se zavrtite (s malo trenja, npr. na ledu ili u zraku ili svemiru, jer trenje je vanjska sila tj. moment sile koji vas usporava) i onda skupite ruke uz tijelo vaša rotacija će se ubrzati, a ako ih potom rašinite vaša rotacija će se usporiti, i obrnuto. Tako se klizači(ce) zavrtite jako brzo ... Isto je i sa provodjenjem salta, što je samo rotacija oko druge osi (pirueta je oko osi koja prolazi kroz središte tijela gore-dolje, a salto oko osi koja prolazi kroz središte tijela lijevo-desno) pa treba skupiti/rašiti cijelo tijelo bliže osi rotacije ...