NEWTONOVA GRAVITACIJA

Povijesni uvod:

- podjela na zemaljsku i nebesku „mehaniku" još iz (pred)antičkih vremena (Newton je „riješio" obje❢)

- važnost razumijevanja, opisivanja i mogućnosti predviđanja kretanja na „nebu" u tim vremenima (za kalendar, za vjerske potrebe itd.)

  → objašnjenja nisu bila previše u kontaktu s opisom ...
  (zašto?) [to bi i bilo dosta ambiciozno bez teleskopa i ispravnih teorija zemaljske fizike] (kako?)

  → čovjek/Zemlja u centru (nekako logično)
  (POSEBNO BITNO ranom kršćanstvu❢)
  (btw. znali/pretpostavljali su da je OKRUGLA

→ ARISTARH [~250 PNE]
  ↳ prvi predložio heliocentrični sustav, jer je bio jednostavniji (ali nije mogao dokazati matematički)
  ↳ također: - pretpostavio da su zvijezde iste kao Sunce, samo puno dalje...❢
  - dao procjene veličine i udaljenosti MJESECA i SUNCA

→ <u>PTOLOMEJ (Klaudije)</u> [~ 150 A.D.]

↳ matematički detaljno razrađen <u>GEOcentrični</u> model gibanja planeta i zvijezda (epicikli i svašta...) – JAKO KOMPLICIRAN i nespretan, namješten na puno podataka i tablica... Ali davao dobre rezultate / predviđanja.

→ <u>Nikola KOPERNIK</u> [1473 – 1543 A.D.; Poljska/Prusija]

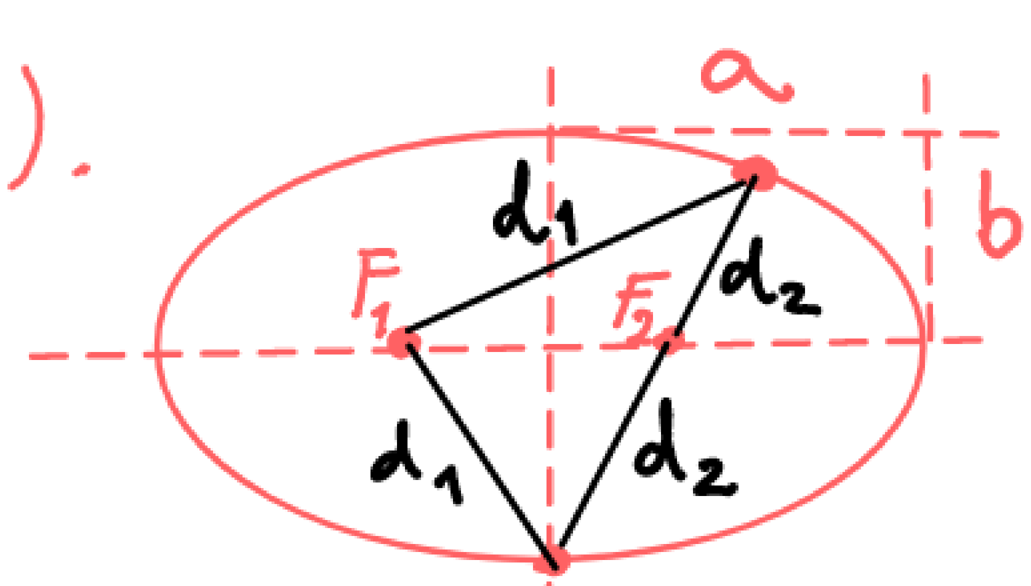
↳ ponovno (neovisno) „otkrio" i predložio ideju HELIO-CENTRIČNOG sustava... („Kopernikanski obrat")

→ <u>Johannes KEPLER</u> [1571 – 1630 A.D.]

↳ pod utjecajem Kopernikove ideje i razvoja astronomije (instrumenata itd.) „otkrio" <u>3 zakona gibanja planeta oko Sunca</u> (tzv. KEPLEROVI ZAKONI):

1) Planeti se oko Sunca gibaju u ELIPSAMA, pri čemu je Sunce u jednom FOKUSU

ELIPSE su krivulje određene s 2 točke – FOKUSA – na način da je zbroj udaljenosti svake točke na elipsi do tih fokusa JEDNAK ($d_1 + d_2 = D = \text{konst.}$).



a – velika poluos

b – mala poluos

$F_{1,2}$ – fokusi

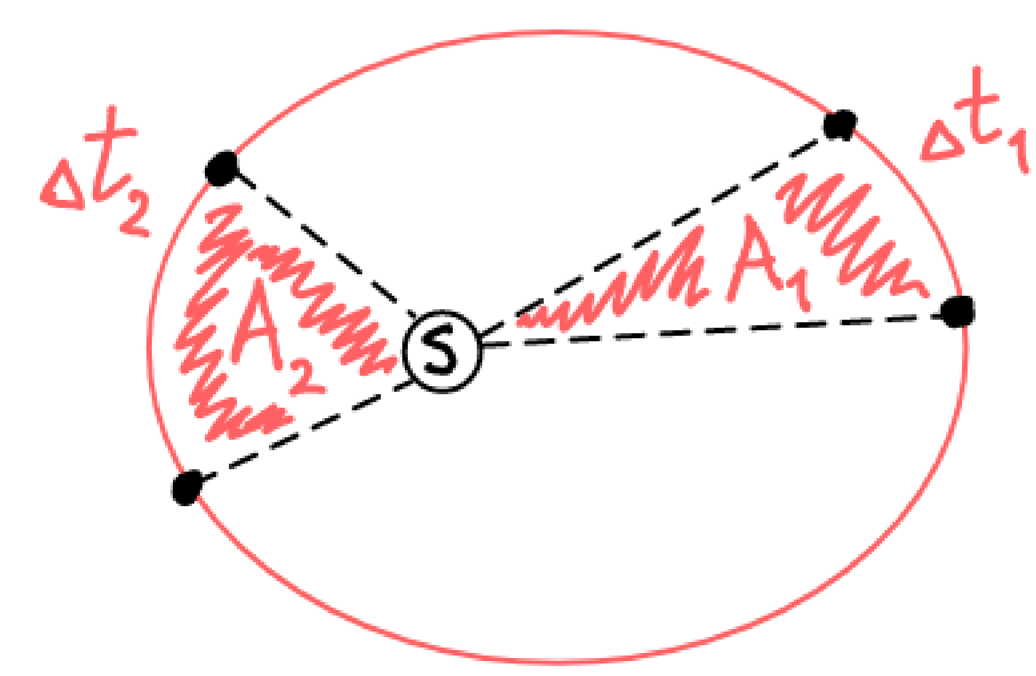
<u>vidi</u> – konstrukcija s uzicom i čavlićima

→ te elipse su u stvarnosti (za planete oko Sunca) VRLO približno KRUŽNICE ($F_1 = F_2 = c$; $a = b = r$), npr. za Zemlju $b/a = 0.999855$ (udaljenost 2 fokusa je $2c \approx 5 \cdot 10^6$ km, ali na „promjer" elipse od $2a \approx 300 \cdot 10^6$ km to je $< 2\%$), ZATO je to bilo teško otkriti...

2) Spojnica planeta i Sunca „prebriše" jednaku površinu u jednakim vremenima ($A \propto \Delta t$)

→ u prijevodu: što je planet bliže Suncu to mu je veća brzina, što je dalje to je sporiji!

$\Delta t_1 = \Delta t_2 \Rightarrow A_1 = A_2$



3) Period i velika poluos (polumjer) orbite svakog planeta zadovoljavaju odnos:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{konst.}$$

→ u prijevodu: što je orbita veća to planetu „godina" duže traje, ali odnos NIJE linearan (direktno proporcionalan).

→ ti zakoni su KINEMATIČKI – opisuju KAKO se planeti gibaju, ali ne objašnjavaju ZAŠTO!

→ Kepler je među prvim misliocima koji su nagađali da postoji neki općeniti zakon prirode (ili više njih) iz kojeg (kojih) njegovi (Keplerovi) zakoni proizlaze kao specijalni slučajevi ...

→ Isaac NEWTON [1643 - 1727 A.D.]

tzv. „Principia"

→ u djelu „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (Matematički principi filozofije prirode; 1687.) iznio, uz „svoja" 3 osnovna, univerzalna zakona prirode, i OPĆI ZAKON GRAVITACIJE (a „usput" iznio i puno „nove" matematike koja je bila potrebna za korištenje tih njegovih „novih" zakona prirode ... jedno od najznačajnijih djela u povijesti fizike i matematike, znanosti općenito)

→ pokazao da to objašnjava padanje stvari na Zemlju, gibanje Mjeseca oko Zemlje i SVE Keplerove zakone ...

⇒ prvo „veliko ujedinjenje" u povijesti znanosti!
(„zemaljske" i „nebeske" mehanike)

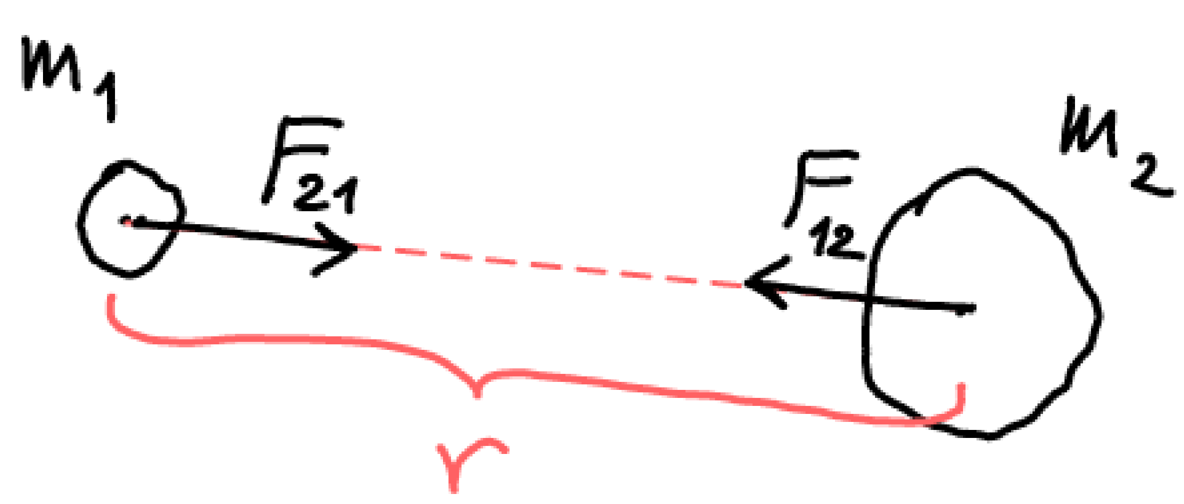
Newtonov opći (univerzalni) zakon gravitacije:

Između SVAKA 2 tijela (čestice) djeluje PRIVLAČNA sila koja je PROPORCIONALNA MASAMA tih tijela, a OBRNUTO PROPORCIONALNA KVADRATU UDALJENOSTI tih tijela...

→ matematički: $F_G \propto \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow \boxed{F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$!

GRAVITACIJSKA KONSTANTA

$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$



$F_{12} = F_{21} = F_G$!

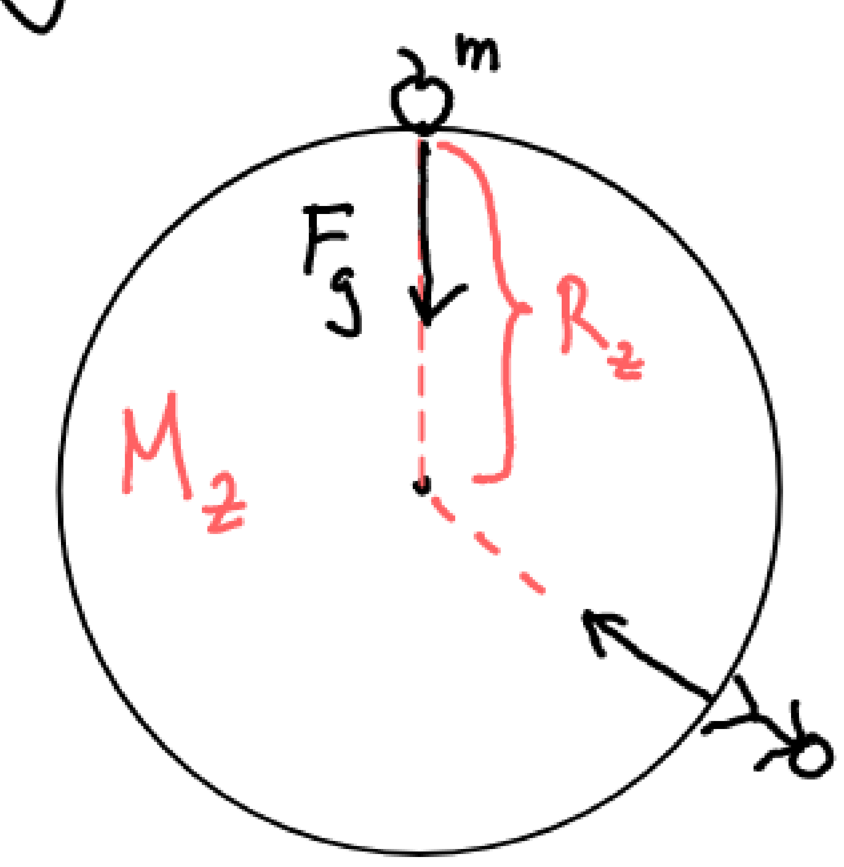
→ jako mali broj $(10^{-11}) \Rightarrow$ gravitacijska sila je SLABA !

→ specijalni slučaj – sferno-simetrično tijelo (sfera, kugla, ...):

gravitacijski utjecaj tijela IZVAN TIJELA isti je kao da se sva masa tijela nalazi u središtu tijela !

Za sva druga tijela (oblike) treba detaljan račun gravitacijskog doprinosa svakog dijelića tijela (integrali...), ALI u većini „normalnih" slučajeva može se uzeti kao da je sva masa sadržana u centru mase tog tijela...

→ posljedice na Zemlji: $\boxed{F_g = F_G}$



$$m \cdot g = G \cdot \frac{M_z \cdot m}{(R_z+h)^2}$$ [h – visina od površine Zemlje]

$$\Rightarrow g = \frac{G \cdot M_z}{(R_z+h)^2} \approx \frac{G \cdot M_z}{R_z^2} \approx 9.8 \ \frac{m}{s^2}$$

za $h \lll R_z$, npr. $h \lesssim 10$ km ($R_z \approx 6371$ km)

⇒ Sila teža posljedica je gravitacijskog privlačenja Zemlje prema njenom središtu i samo je PRIBLIŽNO (prividno) konstantna i svugdje jednaka pri površini Zemlje (jer je Zemlja OGROMNA i približno kugla).

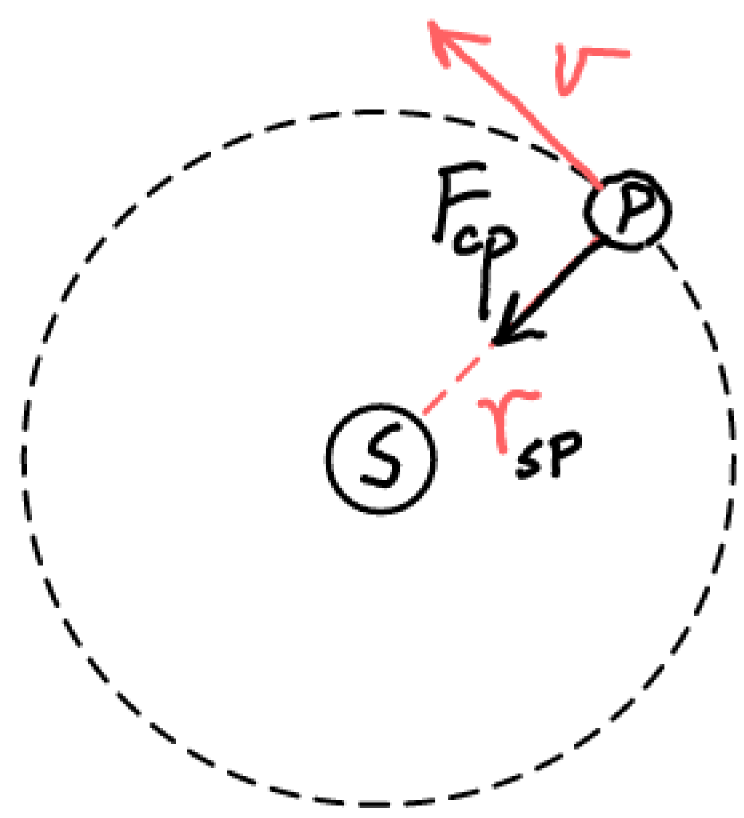
Npr. Zemlja pri površini privlači čovjeka mase 100 kg silom od ≈ 1000 N ravno prema „dolje" (tj. središtu Zemlje).

Istog tog čovjeka drugi čovjek od 100 kg koji stoji 1 m od njega privlači gravitacijskom silom od $\approx 0.7\ \mu N$, što je 9 redova veličine ($10^9 \to$ MILIJARDU) puta slabije nego što ga privlači Zemlja.

Također, hrpa kamenja veličine Medvednice bi istog tog čovjeka mase 100 kg privlačila silom od nekoliko desetaka MILI Newtona na udaljenosti od 10-ak kilometara (od CM!)...

→ posljedice na „nebu" (tj. u svemiru):

S = Sunce
P = planet



Jednoliko kružno gibanje (Mjeseca oko Zemlje, planeta oko Sunca, ...) ⇒

⇒ centripetalna sila $\left(F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{r}\right)$

⇒ Planeti i mjeseci kruže zbog gravitacijske sile koja „igra ulogu" centripetalne sile $(F_G = F_{cp})$!

$$\Rightarrow G \cdot \frac{M_s \cdot M_p}{r_{sp}^2} = \frac{M_p \cdot v^2}{r_{sp}}$$

[za bilo koji planet oko Sunca ... ; $v = \frac{2r\pi}{T}$ (opseg) (period)]

udaljenost središta Sunca i planeta

$$\frac{G \cdot M_s}{r_{sp}^2} = \frac{4\pi^2 r_{sp}^2}{r_{sp} \cdot T_p^2}$$

$$\boxed{\frac{T_p^2}{r_{sp}^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s} = konst.}$$

3. Keplerov zakon !

uz pretpostavku savršeno kružnog gibanja ...

Bez ikakvih pretpostavki mogu se iz Newtonovog zakona gravitacije (i ostala 3 općenita) EGZAKTNO izvesti svi Keplerovi zakoni te izračunati/predvidjeti gibanja svih (ostalih) svemirskih tijela (mjeseci, asteroidi, kometi ...).
Putanje će za 2 tijela uvijek biti ČUNJOSJEČNICE (elipse, parabole ili hiperbole).
[Google it]

→ dvije VRLO VAŽNE osobitosti Newtonovog zakona gravitacije:

1) Sila pada S KVADRATOM ($\propto 1/r^2$) udaljenosti !

Matematičke posljedice toga su brojne, između ostalog i to da se sferno-simetrična tijela ponašaju kao da je sva masa točno u središtu. Da je odstupanje od TOČNO kvadratne ovisnosti iti minimalno svemir ne bi „funkcionirao" i puno toga bi bilo puno kompliciranije ili nemoguće.

To je točno granica između onoga što fizičari zovu „dugodosežna" i „kratkodosežna" interakcija.

2) Svojstvo tijela na koje gravitacija „djeluje" je MASA, tj. masa iz 2. Newtonovog zakona ($F = m \cdot a$; tzv. inercijska masa) i iz zakona gravitacije (tzv. gravitacijska masa) su jedno te ista stvar !

To gravitaciju stavlja u poseban položaj među svim silama (jer ni jedna druga ne djeluje na SVA „TIJELA"), a to ima jako duboke implikacije i za modernu fiziku...

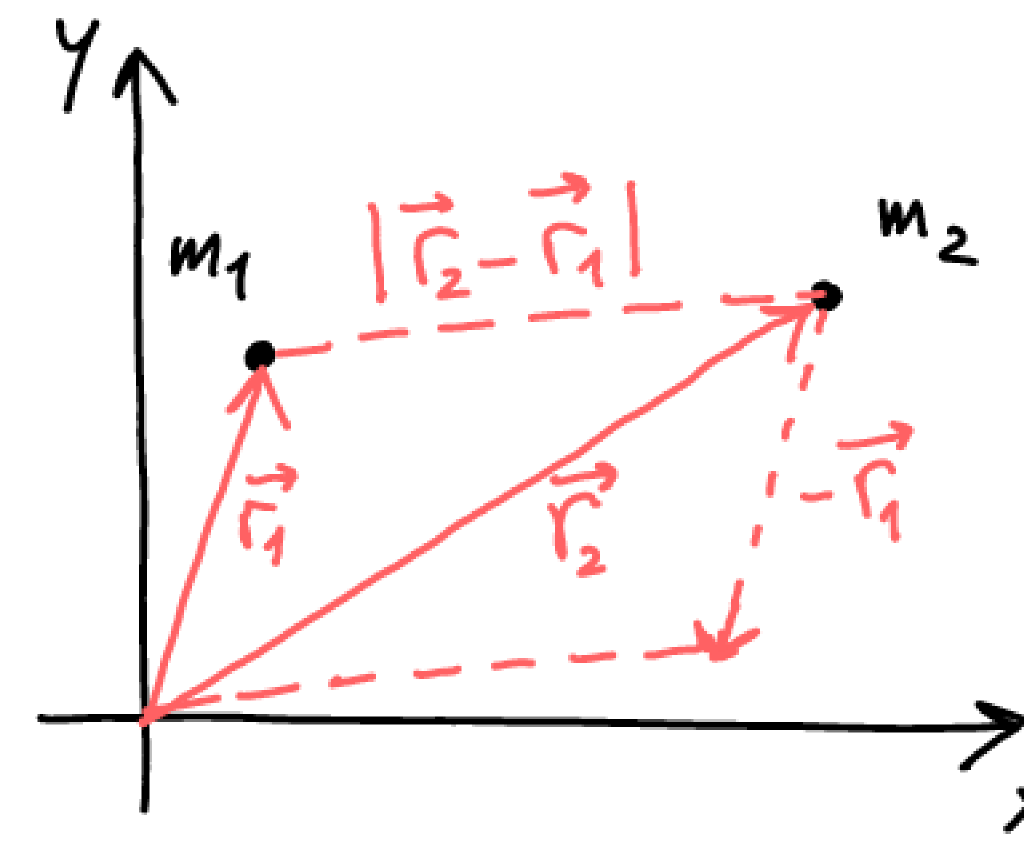
To je i razlog zašto sva tijela jednako ubrzavaju prema Zemlji, a što je zbunjivalo mislioce od samih početaka.

Gravitacijska potencijalna energija

- jedina VARIJABLA Newtonovog zakona gravitacije je (trenutna) UDALJENOST, dakle razlika POLOŽAJA $\left(r = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|\right)$

  ⇒ gravitacija je KONZERVATIVNA sila !

  (dakle „čuva" energiju u obliku POTENCIJALNE energije)



- gravitacijska sila nije konstantna i sve je manja (teži ka 0) što su tijela udaljenija, i UVIJEK je privlačna ...

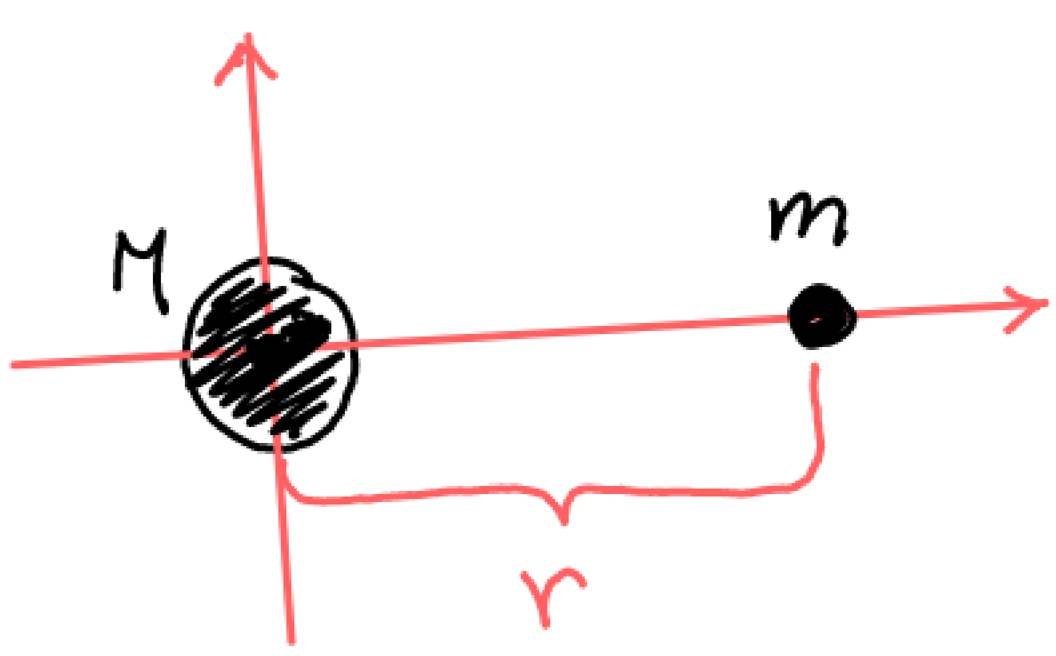
  ⇒ potencijalna energija je 0 onda kada nema sile (objektivno, za sve „promatrače" tj. ref. sustave), a to je kada je $r \to \infty$ (tijela su „beskonačno" tj. jako daleko)

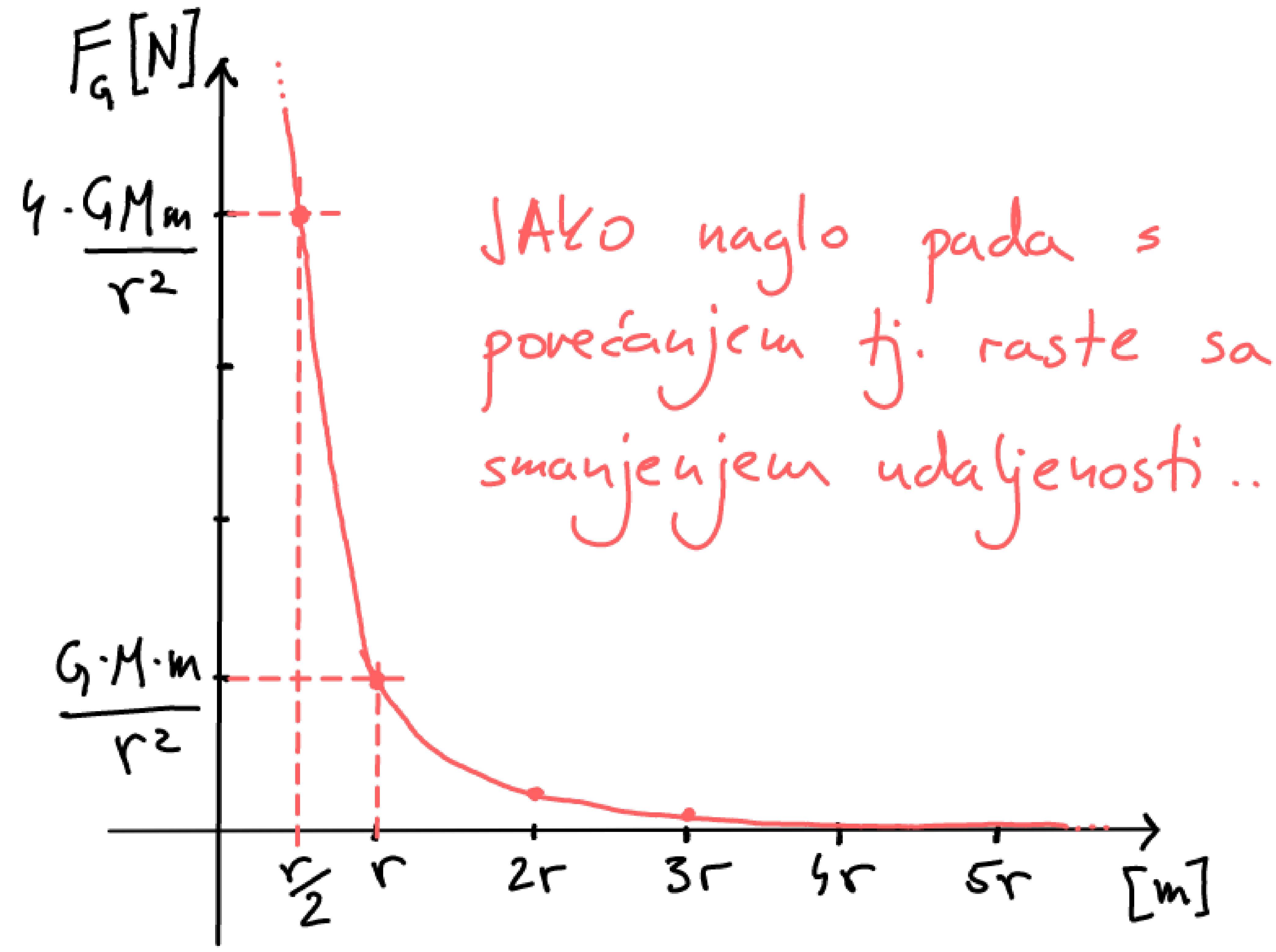
  ⇒ ako se 2 tijela na udaljenosti r pusti iz mirovanja, oni će početi „padati" jedno prema drugome ...

  ⇒ potencijalna energija mora biti da se SMANJUJE jer kinetička raste (ubrzavaju jedno prema drugome), a ukupna energija mora ostati ista (očuvana) !

Dakle, najveća moguća (objektivna) vrijednost gravitacijske potencijalne energije je 0, što znači da je općenito < 0 !

Zamislimo 2 tijela, mase M i m, u inače praznom svemiru i zamislimo koordinatni sustav čije ishodište se nalazi u središtu mase M. Kako izgleda graf iznosa gravitacijske sile u ovisnosti o udaljenosti (r) tijela M i m...





Što to znači za gravitacijsku potencijalnu energiju (E_G)?

Utvrdili smo da mora biti $E_G(\infty) = F_G(\infty) = 0$; $E_G(r) < 0$ ...

Podsjetnik: rad je površina u F-s grafu...

⇒ Rad koji obavi gravitacijska sila dok tijela mase M i m približi s jako velike ($\approx\infty$) udaljenosti na udaljenost r jednak je „izgubljenoj" potencijalnoj energiji → POVRŠINA „ISPOD" $F_G(r)$ grafa od r do ∞!

→ za izračun tog potrebno znati INTEGRIRATI...

Ima li neki način da „pogodimo" izraz za $E_G(r)$?

Podsjetnik 2: Joule [J] = Newton [N] × metar [m]

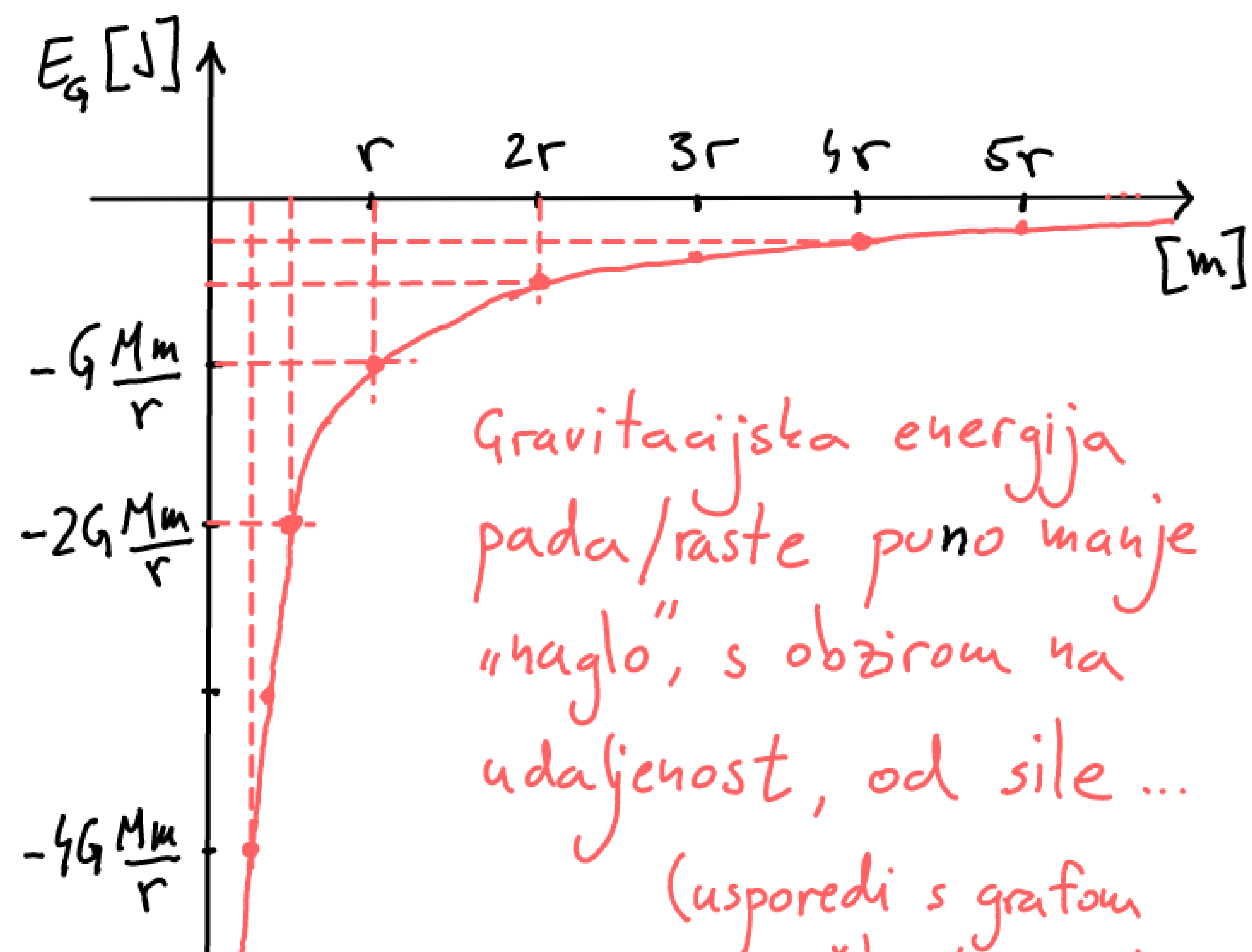
U opisanoj situaciji (prazan svemir s tijelima M i m na udaljenosti r) jedina veličina fizičke dimenzije duljine je udaljenost **r**, a jedini izraz za silu je $\frac{G\cdot M\cdot m}{r^2}$ ...

Umnožak te dvije stvari ima dimenziju energije (Jouli) i zadovoljava uvjet da $E_G(\infty)=0$. Još samo treba dodati „–" da se zadovolji $E_G(r)<0$ i dobije se:

$$\boxed{E_G(r) = -G\,\frac{M\cdot m}{r}}$$

!

Gravitacijska potencijalna energija tijela mase **m** na udaljenosti **r** od tijela mase **M**.



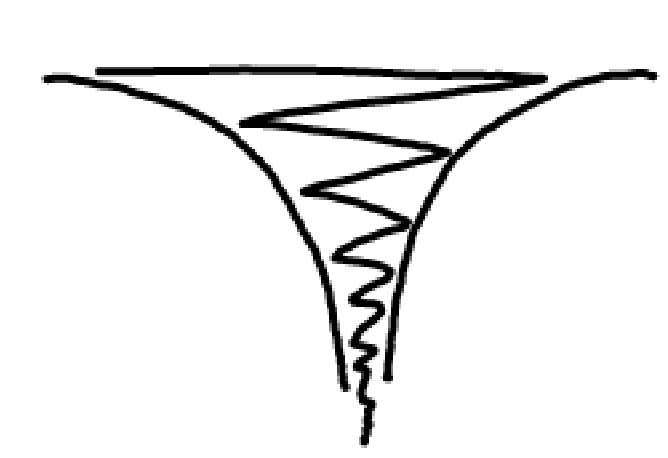
Gravitacijska energija pada/raste puno manje „naglo", s obzirom na udaljenost, od sile ...

(usporedi s grafom s prošle stranice)

↑

GRAVITACIJSKA JAMA

Sve pada prema svemu, sve „dublje" što je bliže središtu ...



Google - CRNA RUPA

Neki zanimljivi računi / primjene...

1) Orbitalna brzina (I. kozmička brzina)

Brzina kojom nešto treba „ispucati" paralelno s površinom nekog velikog (okruglog) svemirskog tijela da bi ono ostalo u orbiti (na toj udaljenosti od središta)...

To je zapravo tangencijalna brzina jednolikog kruženja pri čemu gravitacija igra ulogu centripetalne sile:

$$F_{cp} = F_G \rightarrow \frac{m v_0^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \rightarrow v_0^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{(R+h)}}$$

M - masa svemirskog tijela
R - polumjer svemirskog tijela
h - visina od površine tijela

npr. za Zemlju pri površini ($h=0$; zanemaren otpor atmosfere)

$$v_0 = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\ kg}{6.37 \cdot 10^{6}\ m}} \approx 7900\ \frac{m}{s} \approx 28500\ \frac{km}{h} \approx 23\ \text{Mach}$$

primjer 2: GEOSTACIONARNA ORBITA - satelit koji uvijek stoji iznad iste točke na Zemlji - okreće se s njom!

$$v_0 = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot (R+h) = \frac{2\pi}{24\,h}(R+h) = \sqrt{\frac{G \cdot M}{(R+h)}}$$

$$\Rightarrow (R+h)^3 = \frac{G \cdot M \cdot (24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2} \Rightarrow h \approx 36\,000\ km \approx 5.5R$$

2) Izlazna brzina (II. kozmička brzina)

Brzina kojom nešto treba ispaliti s površine nekog velikog (okruglog) svemirskog tijela da se ono nikad na njega ne vrati, tj. na njega ne „padne" (dakle da se u potpunosti „otme" njegovom gravitacijskom utjecaju)...

To je brzina pri kojoj tijelo ima kinetičku energiju koja je jednaka (ili veća) gravitacijskoj potencijalnoj koju tijelo ima dok stoji na površini tog svemirskog tijela, tako da je ukupna energija jednaka 0 (ili veća), što znači da će tijelo imati kinetičku energiju ≥ 0 kad se „otme" gravitaciji...

$$\Rightarrow E_k + E_g \geq 0 \rightarrow \frac{m v_i^2}{2} - G\frac{M \cdot m}{r} \geq 0$$

$$\Rightarrow v_i \geq \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{(R+h)}} = \sqrt{2} \cdot v_0$$

npr. za Zemlju s površine ($h=0$; zanemaren otpor atmosfere)

$$v_i = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6.37 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}}} \approx 11200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 40250\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx$$

≈ 33 Mach

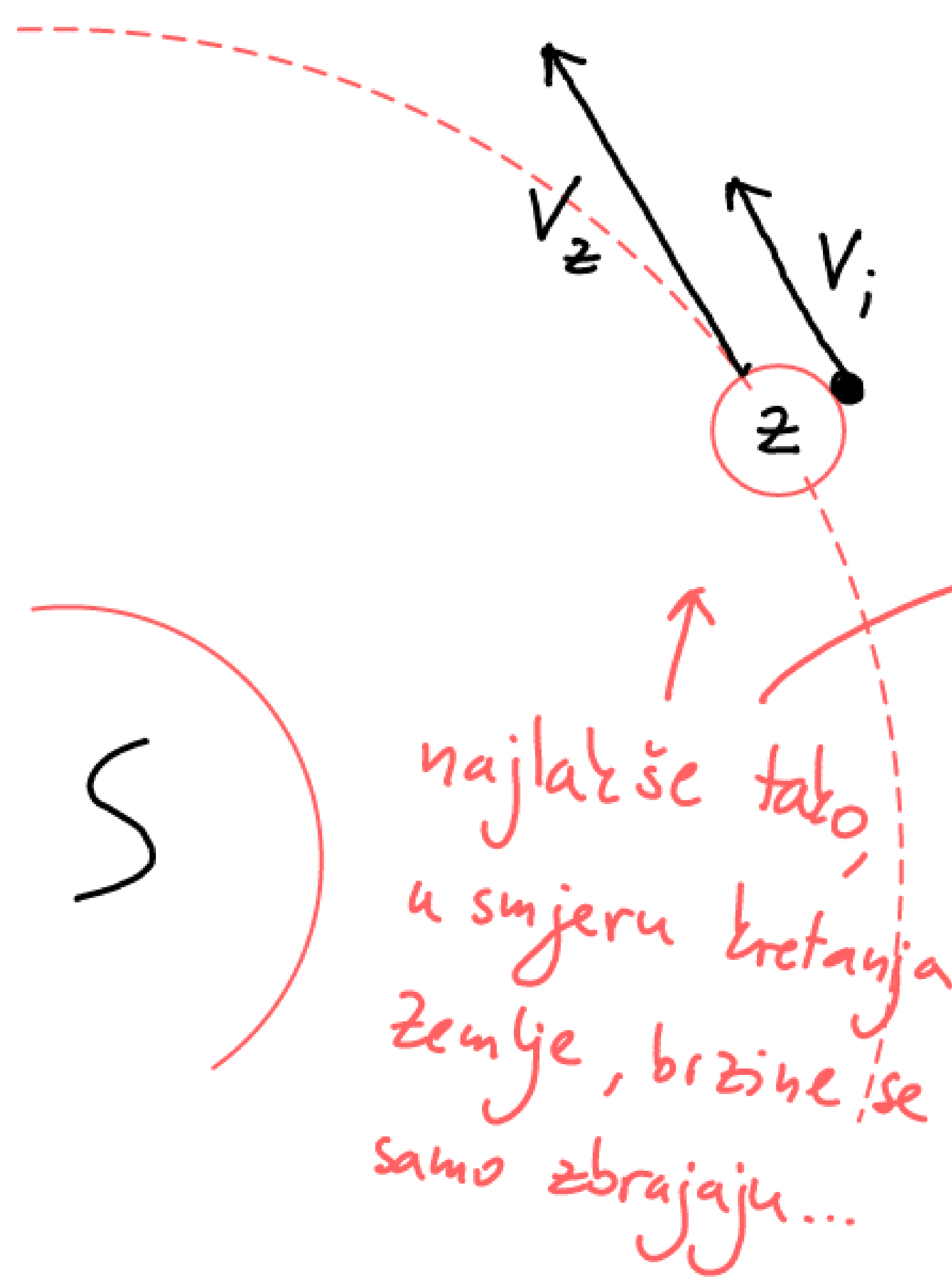
→ smjer nevažan (ne mora biti ravno „gore")
ali određuje putanju (koja može biti svakakva).

primjer 2: izlazak iz Sunčevog sustava ... (III. kozmička brzina)

I) S površine Sunca (nerealistično)

$$\rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_S}{R_S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{6.96 \cdot 10^{8}}} \approx 617\,600 \ \frac{m}{s} \quad !!$$

II) S površine Zemlje ... Sad je bitan smjer, jer Zemlja kruži oko Sunca → početna brzina! $\left(v_z = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{R_{ZS}}} = 29.75 \ \frac{km}{s} \right)$



V_i – brzina tijela U ODNOSU NA ZEMLJU

stvarna brzina (u odnosu na Sunce):

$$V = V_z + V_i$$

Ukupna energija (u odnosu na Sunce):

$$E_k + E_{g,s} + E_{g,z} \geq 0$$

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{R_{ZS}} - \frac{G \cdot m \cdot M_Z}{R_Z} \geq 0 \quad / \cdot \frac{2}{m}$$

gravitacijski utjecaj Sunca (na Zemlji)

gravitacijski utjecaj Zemlje

$$(V_z + V_i)^2 - 2 V_z^2 - 2 V_0^2 \geq 0$$

$$(V_z + V_i)^2 \geq 2 (V_z^2 + V_0^2)$$

$$V_i \geq \sqrt{2} \sqrt{(V_z^2 + V_0^2)} - V_z \approx 13.78 \ \frac{km}{s}$$

$$\approx 50\,000 \ \frac{km}{h}$$

$$\approx 40 \ \text{Mach}$$

EUGEN ROŽIĆ, prof.